ÁLGEBRA VETORIAL E GEOMETRIA ANALÍTICA

JACIR J. VENTURI

10ª edição
Revisada e atualizada

Este livro se encontra integralmente no *site*:
www.geometriaanalitica.com.br
com acesso gratuito.

FICHA CATALOGRÁFICA
Catalogação na fonte: Biblioteca Central UFPR

VENTURI, Jacir J., 1949-
Álgebra Vetorial e Geometria Analítica / Jacir J. Venturi
10. ed. – Curitiba, PR
242 p.: il.
Inclui Bibliografia
ISBN 85.85132-48-5
1. Álgebra Vetorial. 2. Geometria Analítica.
I. Título
CDD-512.5
CDD-514.124
ISBN 85-85 132-48-5
REF. 072

Ilustrações: Herica Yamamoto

Projeto gráfico / Diagramação: Sincronia Design Gráfico Ltda.

Impressão e acabamento: Gráfica Infante

Edição: Livrarias Curitiba

Dedico às pessoas que procuram o melhor no outro e ao outro também oferecem o melhor de si.

Jacir J. Venturi

ÍNDICE

CAPÍTULO 5 – VETORES

CAPÍTULO 6 – VETORES: APLCAÇÕES GEOMÉTRICAS CLÁSSICAS

CAPÍTULO 7 – O PLANO NO E^3

CAPÍTULO 8 – A RETA NO E^3

PREFÁCIO

O presente trabalho foi escrito tendo como norte uma premissa básica: que fosse acessível ao aluno do 1º ano da Faculdade e para tanto sua linguagem teria que ser tão clara e didática quanto possível. Por vezes, preferiu-se a apresentação intuitiva aos refinamentos teóricos.

Contém 421 exercícios (com seus subitens) em ordem crescente de dificuldade. Para uma boa assimilação do texto, resolveremos diversos exercícios em aula, deixando os demais a cargo do aluno. Propositalmente, não se inseriram no texto exercícios resolvidos (afora alguns exemplos de aplicação imediata da teoria) para uma maior valorização da aula, enlevando a interação aluno-professor. O aluno deve ter em mente que à resolução dos exercícios deve preceder um bom conhecimento da teoria.

Um grande número de ilustrações facilita o entendimento do texto e é imprescindível quando se almeja a formação de uma visão espacial na Geometria Analítica Tridimensional. Há sinopses históricas, indicações de aplicabilidade prática e sugestões para a resolução de exercícios, no intuito de motivar o aluno naquilo que está estudando.

Os quatro primeiros capítulos integram o programa da Geometria Analítica na UFPR e foram abordados de maneira concisa para não penalizar importantes capítulos vindouros da disciplina: reta, plano, cônicas, superfícies, etc.

Os capítulos 5 e 6 tratam de vetores. Há inúmeros caminhos para a resolução de problemas geométricos através da Álgebra, porém o tratamento vetorial é o mais indicado pela sua elegância e simplicidade, além de ser assaz importante a outras disciplinas. A um bom rendimento escolar em Geometria Analítica, com enfoque vetorial, atrela-se um respeitável conhecimento dos capítulos 5 e 6.

Há que se tomar público que, face à nossa formação acadêmica e relacionamento profissional, o presente trabalho recebeu preponderante influência do livro Geometria Analítica e Vetores, do Professor Leo Barsotti, que recomendamos a todos os alunos que aspiram a um aprofundamento e a um maior rigor no assunto.

Ademais, cumprimos o elementar dever de gratidão pelo desprendimento com que os professores Florinda Miyaòka, Osny A. Dacol, Ana

Maria N. de Oliveira, Luci C. Watanabe e Ivo J. Riegler se dispuseram a ler o manuscrito e apresentar sugestões. O mesmo preito de gratidão estendemos à plêiade de colegas e amigos do Depto. de Matemática da UFPR, que nos propiciaram uma convivência de crescimento na disciplina, em mais de quatro lustros.

Críticas e sugestões hão de surgir. E serão bem-vindas. Resta-nos o consolo de ter envidado esforços para empregar utilmente o nosso tempo. "A censura que nos for feita – se faz oportuno Souza Pinto – há de ser mitigada pelo censor se ele chegar a ter consciência de nossa boa vontade em acertar."

O Autor

APRESENTAÇÃO

Prezado Universitário:

> "Tinha 12 anos quando assisti à demonstração de um teorema de Geometria e senti uma espécie de vertigem. Parecia que estava descobrindo um mundo de infinita harmonia. Não sabia, então, que acabava de descobrir o universo platônico, com sua ordem perfeita, com seus objetos eternos e incorruptíveis, de uma beleza perfeita e alheia a todos os vícios que eu acreditava sofrer. Assim, apesar de minha vocação ser a de escrever ou pintar, fui atraído durante muitos anos por aquela realidade fantástica."

Neste excerto de entrevista, de 1987, o renomado escritor argentino Ernesto Sábato sintetiza um dos mais conspícuos encômios à Geometria e, por extensão, à Matemática "um mundo de infinita harmonia". Este é o sentimento que nós, professores, devemos transmitir aos alunos de boa vontade.

A didática, de um lado, cobra do professor a sensibilidade para perceber o nível da classe e, a partir daí, iniciar o seu trabalho; que o professor dispa a postura hermética e estanque do ensino à base de "quadro-negro, giz e salivação"; que induza o seu discípulo a apreciar a Matemática como disciplina autônoma, abstrata e, concomitantemente, utilitária em diversos setores. De outro lado, faz-se mister que o aluno perceba o seu papel no processo, assumindo uma postura dinâmica e participativa. Não basta ao aluno sentar-se em sala de aula e ouvir a explicação do professor. É impossível aprender a jogar tênis apenas assistindo de camarote. Assim também com a Matemática: é necessário treino, exercícios e efetiva participação pessoal.

A Matemática é uma disciplina que propicia o encetamento e a formação do raciocínio. E para a maioria das atividades profissionais (que exigem o nível universitário) é o raciocínio a principal ferramenta de trabalho. Mesmo profissionais que não a utilizam, reconhecem que a Matemática enseja o apanágio da lógica, da têmpera racional da mente e da coerência do pensamento.

Acreditamos que o estímulo ou o desestímulo pela Matemática ocorre a nível do Ensino Fundamental. A esse nível, tal como uma es-

trutura geológica, os conhecimentos matemáticos se sedimentam e se estratificam. Disso resulta, como maior legado, o entendimento e a motivação pela disciplina no Ensino Médio. Este embasamento representa a *conditio sine qua non* para um bom rendimento na Faculdade. Isto posto, a carência de tal embasamento leva a obstáculos que podem ser transpostos na interação aluno-professor. A nós, professores, importa a sensibilidade à percepção de tais dificuldades bem como a disposição de retornar aos níveis anteriores sempre que necessário. É frustrante observar que em certos cursos – em especial noturnos – o índice de desistência atinge 30% até ou logo após a primeira avaliação. Se consciente da sofrível formação anterior, cabe ao universitário novel a busca junto aos livros, professores e colegas. Atirar pedras no passado, pela malsã qualidade de ensino ou pela má qualificação de alguns professores do Ensino Fundamental ou Médio, não leva a nada. “O importante – afirma Jean-Paul Sartre – não é o que fizeram de nós, mas o que fazemos do que fizeram de nós”.

Ao ingressar na Universidade, o calouro sente-se perplexo e desamparado. Há, no sistema educacional brasileiro, uma dicotomia entre o Ensino Médio e a Faculdade. Enfatizam-se demonstrações, teoremas e abstrações aqui e quase nada lá. Cobra-se autodidatismo e raciocínio na Faculdade de quem cursou (salvo exceções) um Ensino Médio preponderantemente à base de memorizações e expedientes similares. Tal procedimento – argumenta Valmir Chagas – “desenvolve uma estranha metodologia de perguntas e respostas tipificadas e gera maus hábitos de estudo”. É uma ledice enganosa transferir a metodologia de ensino dos cursinhos ao Ensino Médio.

Cabe à comunidade universitária a consciência das mazelas do sistema educacional brasileiro. Não é só: faz-se mister uma postura crítica e participativa diante das decisões administrativas e pedagógicas. Se tal situação não é apanágio do momento atual e sim tão antiga quanto o próprio Brasil, a ressalva cabe ao conformismo apático e ao fatalismo de aceitar as coisas como estão e como sempre foram.

É papel precípuo da Universidade, e lhe cabe a iniciativa, promover econômica e socialmente a comunidade. Esta geralmente não tem consciência de seus próprios problemas e muito menos de como resolvê-los.

O Autor

SINOPSE HISTÓRICA

Foi extraordinário o incremento dado à Geometria Plana e Espacial pelos matemáticos helenísticos:

- Pitágoras (560-500 a.C.)
- Euclides (c. 325-c. 265 a.C.)
- Arquimedes (287-212 a.C.)
- Apolônio de Perga (262-190 a.C.)

Com estes ecléticos sábios, a Matemática deixa seu caráter meramente intuitivo e empírico (egípcios e babilônios) e se assume como disciplina racional, dedutiva e lógica, a partir da criação de definições, axiomas, postulados e teoremas.

Pitágoras fundou no sul da Itália, na Ilha de Crotona, a Escola Pitagórica, a quem se concede a glória de ser a "primeira universidade do mundo". Foi uma entidade parcialmente secreta, envolta em lendas, com centenas de alunos. Estudavam Matemática, Astronomia, Música e Religião.

Embora se suspeite da autenticidade histórica, conta-se que Pitágoras tenha praticado uma hecatombe (sacrifício de cem bois), comemorando a demonstração do seu célebre teorema $a^2 = b^2 + c^2$.

Consta que uma grande celeuma instalou-se entre os discípulos de Pitágoras a respeito da irracionalidade do $\sqrt{2}$. Utilizando a notação algébrica, a equação $x^2 = 2$ não admitia solução numérica para os pitagóricos, pois estes só conheciam os números racionais. Dada a conotação mística dos números, comenta-se que, quando o infeliz Hipasus de Metapontum propôs uma solução para o impasse, os outros discípulos o expulsaram da escola e o afogaram no mar.

Euclides fundou a Escola de Matemática na renomada Biblioteca de Alexandria. Todos os grandes geômetras da Antiguidade, como Euclides, Arquimedes, Eratóstenes, Apolônio, Papus, Diofanto, Cláudio Ptolomeu, Teon de Alexandria, Hipátia, etc, debruçaram-se sobre os vetustos e novéis pergaminhos e papiros da grande biblioteca.

A sua destruição talvez tenha representado o maior crime contra o saber em toda a história da humanidade.

Em 48 a.C., envolvendo-se na disputa entre a voluptuosa Cleópatra e seu irmão, o imperador Júlio César manda incendiar a esquadra egípcia ancorada no porto de Alexandria. O fogo se propaga até as dependências da Biblioteca, queimando cerca de 500.000 rolos. Restaram aproximadamente 200.000 rolos.

Em 640 d.C., o califa Omar mandou que fossem queimados todos os livros da Biblioteca sob o argumento que "ou os livros contêm o que está no Alcorão e são desnecessários ou contêm o oposto e não devemos lê-los".

A mais conspícua obra de Euclides, **Os Elementos** (c. 300 a.C.) constitui o mais notável compêndio de Matemática de todos os tempos, com mais de mil edições desde o advento da imprensa (a primeira versão impressa de Os Elementos apareceu em Veneza em 1482).

Tem sido – segundo George Simmons – "considerado como responsável por uma influência sobre a mente humana maior que qualquer outro livro, com exceção da Bíblia".

A Biblioteca da Alexandria estava muito próxima do que se entende hoje por Universidade. E se faz apropriado o depoimento do insigne Carl B. Boyer, em a **História da Matemática**. "A Universidade de Alexandria evidentemente não diferia muito de instituições modernas de cultura superior. Parte dos professores provavelmente se notabilizou na pesquisa, outros eram melhores como administradores e outros ainda eram conhecidos pela sua capacidade de ensinar. Pelos relatos que possuímos, parece que Euclides definitivamente pertencia à última categoria. Nenhuma descoberta nova é atribuída a ele, mas era conhecido pela sua habilidade ao expor. Essa é a chave do sucesso de sua maior obra **Os Elementos**".

A genialidade de Arquimedes como físico-matemático só é comparável com Isaac Newton, no século XVIII. Pelas concretas ou supostas obras de Engenharia, foi um precursor de Leonardo da Vinci. Sua produção é completamente original e muito vasta, incluindo Geometria Plana e Sólida, Astronomia, Aritmética, Mecânica e Hidrostática.

Nasceu na Sicília, na cidade grega de Siracusa. Quando jovem estudou em Alexandria, o templo do saber da época, com os discípulos de Euclides.

Suas invenções engenhosas, suas máquinas de caráter utilitário e bélico, o memorizaram através dos séculos por historiadores romanos, gregos, bizantinos e árabes.

Arquimedes, no entanto, considerava seus engenhos mecânicos como fator episódico e que, de certa forma, tiravam a dignidade da ciência pura. "Sua mentalidade não era a de um engenheiro, mas sim, a de um matemático."

Alguns de seus feitos são clássicos e conhecidos, mas merecem ser relembrados:

Por descrição de Vitrúvio, conhecemos a história da coroa da rei Herão. Este havia encomendado a um ourives uma coroa de ouro puro. Uma vez pronta, o desconfiado rei Herão solicitou a Arquimedes que analisasse a coroa e dirimisse a dúvida: era a coroa de ouro puro ou feita de uma amálgama com prata?

Quando tomava banho, Arquimedes, observou que, à medida que seu corpo mergulhava na banheira, a água transbordava. Foi o *insight* para resolver o problema.

Conta a historiador Vitrúvio que Arquimedes, eufórico, teria saído pelas ruas, completamente nu, gritando "*Eureka, eureka*", que significa "Achei, achei".

Refeito do vexame, Arquimedes comprovou que houve fraude por parte do ouvires. Destarte, tomou dois recipientes cheios de água e num recipiente imergiu um bloco de ouro e noutro recipiente, um bloco de prata. Como ambos os blocos continham o mesmo peso que a coroa, comprovou a fraude, pois constatou que os blocos deslocavam quantidades diferentes de água.

Deste fato decorre o **princípio de Arquimedes**, lei básica da Hidrostática: "Todo corpo mergulhado num fluido recebe um impulso de baixo para cima igual ao peso do volume do fluido deslocado".

Paradoxalmente, Arquimedes era muito negligente em termos de asseio pessoal. Lê-se em Plutarco que Arquimedes "era por vezes levado à força para banhar-se ou passar óleo no corpo, que costumava traçar figuras geométricas nas cinzas do fogo, e diagramas no óleo de seu corpo, estando em um estado de preocupação total e de possessão divina, no sentido mais verdadeiro, por seu amor e deleite pela ciência".

Na 2ª Guerra Púnica, contra a poderosa razia do exército e marinha romanos, comandados pelo Cônsul Marcelo, a sagacidade de Arquimedes criou aparatos devastadores.

Marcelo infligiu um cerco de 3 anos e em 212 a.C. a cidade de Siracusa rendeu-se.

Adentrando-se às muralhas de Siracusa as hostes romanas promoveram a pilhagem, seguida de uma sangrenta matança. Um soldado aproximou-se de um encanecido senhor de 75 anos, que indiferente à chacina, desenhava diagramas na areia e absorto balbuciou: "Não toque nos meus círculos". O soldado enraivecido transpassou-o com a espada. Foram as derradeiras palavras de Arquimedes.

A maior grandeza se manifesta na Matemática:

Arquimedes, em um círculo dado, inscreveu e circunscreveu um polígono de 96 lados e obteve a fórmula para o cálculo da área do círculo e, por muitos séculos, o mais acertado valor para π:

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}$$

Uma metodologia absolutamente precisa para se calcular o valor de π surgiu em 1671 como consequência da série de James Gregory.

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

Por essa série, o francês De Lagny em 1719 calculou as 112 primeiras casas decimais de p e em 1873 o inglês W. Shanks chegou manualmente a 707 casas (conta-se que teria levado 5 anos para a execução dos cálculos).

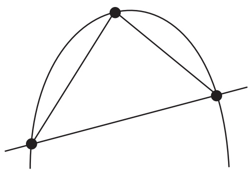
OBSERVAÇÃO

A letra π é a inicial da palavra grega περιφερεια, que significa periferia, circunferência. Sabemos que $\pi = 3{,}1415926535...$ é um número irracional.

Arquimedes deu o tiro de largada de uma longa maratona e, ao mesmo tempo, o estudo do π propiciou notáveis avanços em diversos capítulos da Matemática.

A fita de chegada para o cálculo de π, por meio de polígonos inscritos e circunscritos em uma circunferência, se deu em 1605, quando o matemático holandês Ludolph van Ceulen calculou o π com 35 casas decimais (começou com um polígono de 15 lados e dobrou o número de lados 37 vezes).

Arquimedes demonstrou que a área contida por um parábola (S_p) e uma reta transversal é 4/3 da área do triângulo (S_Δ) com a mesma base e cujo vértice é o ponto onde a tangente à parábola é paralela à base.



$$S_P = \frac{4}{3} S_\Delta$$

Em seus trabalhos de geometria sólida encontramos, pela primeira vez, as fórmulas corretas para as áreas da superfície esférica ($S = 4\pi R^2$), da calota esférica ($2\pi Rh$) e para os volumes da esfera $\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)$ e do fuso esférico $\left(\frac{2R^3\alpha}{3}\right)$.

O ilustre siracusano tratou de forma exaustiva sobre o centro de gravidade de figuras sólidas e planas.

Obteve a área de uma elipse ($S = \pi ab$) e descreveu sólidos de revolução gerados por parábolas, elipses e hipérboles em torno de seus eixos (quádricas de revolução).

Descreveu a curva hoje conhecida como Espiral de Arquimedes (em coordenadas polares têm equação $\rho = k\theta$) e pela primeira vez determina a tangente a uma curva que não seja o círculo.

De forma inédita, Arquimedes apresenta os primeiros conceitos de limites e cálculo diferencial.

Apolônio de Perga parece ter-se considerado um cordial rival de Arquimedes, e muito pouco se sabe de sua vida. Supõe-se ter sido educado em Alexandria e por algum tempo ter ensinado em sua "Universidade". Graças ao apoio de Lisímaco, general de Alexandre, transferiu-se para Pérgamo (donde

vem a palavra pergaminho), onde havia uma Biblioteca e uma "Universidade" só inferiores às de Alexandria.

Apolônio, e não Euclides, mereceu dos antigos o epíteto de o Grande Geômetra e isto pode nos parecer inaceitável. A verdade é que não se pode questionar o mérito de ambos. Euclides tornou-se sinônimo de Geometria por sua amplamente conhecida obra **Os Elementos**, enquanto a maior parte das obras de Apolônio desapareceram.

O que sabemos dessas obras perdidas devemos a Pappus de Alexandria (século IV d.C.), que fez uma breve descrição de sua monumental produção matemática. Infere-se que os tratados de Apolônio continham uma Matemática bastante avançada e inclusive muito do que conhecemos hoje como Geometria Analítica.

Para gáudio de todos, porém, o tratado **As Cônicas**, sobre seções cônicas, suplantou todas as obras existentes na Antiguidade. O tratado As Cônicas é composto de oito livros, sete dos quais sobreviveram.

É inegável a influência de Apolônio sobre Isaac Newton, Ptolomeu (tabelas trigonométricas, sistemas de latitude e longitude), Kepler ("os planetas descrevem órbitas elípticas em torno do Sol, com o Sol ocupando um de seus focos"), Galileu ("a trajetória de um projétil é uma parábola").

Sabemos que a Geometria Analítica faz uma simbiose da Geometria com a Álgebra. Face ao exposto, concluímos que os gregos promoveram um extraordinário incremento à Geometria. No entanto, como não dispunham de uma notação algébrica adequada, a Matemática grega teve o seu ocaso com Apolônio.

A Álgebra, podemos afirmar de forma concisa, possui uma dupla paternidade: Diofanto e Al-Khowarizmi.

Diofanto de Alexandria viveu no século III d.C., e sua principal obra foi Aritmética, tratado que originalmente era composto de treze livros, dos quais só os seis primeiros se preservaram. O principal mérito da Aritmética é a utilização de notações, ou seja, de uma linguagem mais sincopada, mais simbólica para a Matemática.

Por seu turno, Al-Khowarizmi viveu por volta de 800 d.C. na cidade de Bagdá, que emerge como uma nova Alexandria. Sua principal obra, **Al-Jabr**, deixou marcas indeléveis em toda a Europa. Al-Jabr recebeu a forma latinizada *Algebrae* (Álgebra).

Em árabe *Al-Jabr* significa, numa tradução mais livre, deslocação e parece "referir-se à transposição de termos subtraídos para o outro lado da equação".

Os símbolos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 tiveram notável receptividade na Europa através da obra de Al-Khowarizmi. Daí serem denominados algarismos **arábicos**, mas que a bem da verdade são de origem hindu.

Fulcrado nos geômetras gregos e no desenvolvimento da Álgebra em toda a Europa, Pierre de Fermat concluiu em 1629 o manuscrito **Ad locos planos et**

solidos isagoge (Introdução aos lugares planos e sólidos). Para a maioria dos historiadores, tal manuscrito representa o marco zero da Geometria Analítica.

É curioso observar que Fermat não era um matemático. Estudou Direito em Toulouse, na França, e aí exerceu o cargo de advogado e conselheiro do parlamento. Fermat tinha a Matemática como um "hobby" e mesmo assim foi considerado por Pascal o maior do seu tempo. Dedicou-se aos pensadores clássicos e à Matemática grega e segundo Carl B. Boyer, a obra **As Cônicas** de Apolônio foi uma das obras favoritas de Fermat.

Coube a Pierre de Fermat (1601-1665) a descoberta das equações da reta e da circunferência, e as equações mais simples da elipse, da parábola e da hipérbole. Aplicou a transformação equivalente à atual rotação de eixos para reduzir uma equação do 2º grau à sua forma mais simples. É cristalina em Fermat a percepção de uma Geometria Analítica a três dimensões: "mas se o problema proposto envolve três incógnitas, deve-se achar, para satisfazer a equação, não apenas um ponto ou uma curva, mas toda uma superfície".

É oportuno observar que a usual denominação **sistema cartesiano** (*Cartesius* é a forma latinizada de Descartes) é anacrônica historicamente, pois sua obra não contém eixos perpendiculares, eixos oblíquos, tampouco a equação de uma reta. Por mérito, o sistema cartesiano deveria denominar-se **sistema fermatiano**.

No entanto, Descartes (que para sempre será lembrado como grande filósofo) superou Fermat pela utilização de uma notação algébrica mais prática.

Muito deve a Geometria Analítica tridimensional a Leonhard Euler (1707-1783). Euler nasceu na Basiléia, Suíça, e recebeu uma educação bastante eclética.

Extremamente profícuo, insuperável em produção matemática, Euler escrevia uma média de 800 páginas por ano. Em plena atividade intelectual, morreu aos 76 anos, sendo que os últimos 17 anos passou em total cegueira (consequência de catarata). Mesmo assim continuou ditando aos seus filhos (eram 13).

A partir de meados do século XIX, desenvolveu-se o conceito de Espaço de 4, 5... n dimensões.

Em 1854, o jovem matemático alemão Bernhard Riemann desenvolveu a ideia de uma Geometria Quadridimensional. Albert Einstein, em 1915, mostrou que o nosso universo embora pareça E^3, é na verdade E^4. Ele dava o primeiro passo para se perceber a variedade espaço-temporal do universo. Cada um dos pontos do universo é determinado por três coordenadas (espaciais) que especificam sua posição e uma quarta (temporal) que determina o tempo.

Sabemos que os gregos antigos promoveram um grande desenvolvimento à Geometria Plana e Espacial, mas não dispunham de uma notação algébrica ou simbologia adequadas.

Até o século XVI, toda a expressão matemática se fazia de uma forma excessivamente "verbal ou retórica".

Por exemplo, em 1591, Viète para representar a equação quadrática $5A^2 + 9A - 5 = 0$, escrevia em bom latim:

5 in A quad. et 9 in A planu minus 5 aequatur 0. (5 em A quadrado e 9 em A plano menos 5 é igual a zero).

Assevera o matemático alemão Herman Hankel (1839-1873): "Na maior parte da ciências, uma geração põe abaixo o que a outra construiu, e o que uma estabeleceu a outra desfaz. Somente na Matemática é que uma geração constrói um novo andar sobre a antiga estrutura". Como na formação de uma estrutura geológica, as descobertas matemáticas se sedimentam e se estratificam ao longo dos séculos. Entretanto, não se infira que a Matemática é uma ciência estática, e sim em contínua evolução. As formulações inicialmente tênues e difusas percorrem um espinhoso caminho até atingir a magnitude de seu desenvolvimento.

Apropriadamente, já se definiu a Matemática como a "rainha e a serva de todas as ciências". E o apanágio de sua majestade é o rigor, a lógica, a harmonia e sua linguagem precisa, universal e sincopada.

Após este epítome histórico, adentremos entusiasticamente ao mundo maravilhoso da Geometria. "Um mundo de infinita harmonia", nas palavras do poeta.

– Que faz Deus, pergunta o discípulo.

– Deus eternamente geometriza – responde sabiamente Platão.

Do Autor

CAPÍTULO 1

NOÇÕES PRELIMINARES

1. ELEMENTOS PRIMITIVOS

A Geometria Euclidiana admite como elementos primitivos os pontos, as retas e os planos.

Notação:

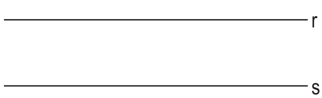
PONTOS: letras latinas maiúsculas.
Ex.: A, B, C ... P, Q ...

RETAS: letras latinas minúsculas.
Ex.: a, b, c ... r, s, t ...

PLANOS: letras gregas minúsculas.
Ex.: α, β, γ ... π …

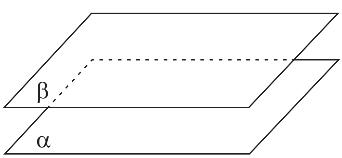
2. PONTO E RETA IMPRÓPRIOS

Ponto impróprio



Se duas retas r e s são paralelas entre si, então elas têm a mesma direção ou o mesmo ponto impróprio. O ponto impróprio da reta s pode ser imaginado como o ponto no infinito de s e é o mesmo para todas as retas que são paralelas a s; será indicado por P_∞.

Reta imprópria



Se dois planos α e β são paralelos, então têm a mesma jacência ou a mesma reta imprópria. A reta imprópria de α pode ser imaginada como a reta no infinito desse plano e é a mesma para todos os planos paralelos a α; será indicada por r_∞.

OBSERVAÇÃO

Chama-se ponto próprio o ponto na sua acepção usual. Assim, duas retas concorrentes têm em comum um ponto (próprio). Analogamente, dois planos concorrentes se interceptam segundo uma reta (própria).

Cada reta própria tem um único ponto impróprio. Em cada plano existe uma única reta imprópria. A reta imprópria é constituída exclusivamente de pontos impróprios. Duas retas impróprias têm em comum um único ponto impróprio. Todos os pontos e retas impróprios do espaço pertencem a um único plano impróprio.

O professor arrependido

Histórias pitorescas sempre têm um pouco de fantasia, principalmente, quando se reportam a homens bem-sucedidos.

Conta-se que na Universidade de Harvard havia um professor de Matemática extremamente rigoroso.

Na última avaliação do ano, elaborou uma prova muito difícil e lançou um desafio a seus alunos: "se um de vocês tirar nota 10 nesta prova, peço demissão da Universidade e serei seu assessor".

Era seu aluno um fedelho de 17 anos, no entanto, brilhante nessa disciplina, considerada a "rainha e serva de todas as ciências". Obteve nota 9,5.



freepick/freepick/vectoropenstock

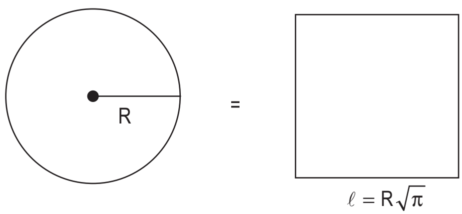
Até hoje, o nosso caro professor lamenta ter sido tão exigente. Perdeu a oportunidade de se tornar um dos homens mais ricos do Planeta. Em tempo: o aluno se chamava Bill Gates.

O problema da quadratura do círculo

Foi proposto inicialmente por Anaxágoras (499-428 a.C.). Aprisionado em Atenas por suas ideias muito avançadas para a época, afirmara que o Sol não era uma divindade, mas uma grande pedra incandescente, maior que o Peloponeso (península do sul da Grécia) e que a Lua não tinha luz própria e a recebia do Sol. Anaxágoras foi professor de Péricles (490-429 a.C.), que o libertou da prisão. Ademais, exerceu forte influência no primeiro dos três grandes filósofos: Sócrates, Platão, Aristóteles.

Problema da Quadratura do Círculo: dado um círculo, construir um quadrado de mesma área. Como os gregos desconheciam as operações algébricas e priorizavam a Geometria, propunham solução apenas com régua (sem escala) e compasso. No século XIX, demonstrou-se que nestas condições este problema é irresolúvel.

A solução é trivial se lançarmos mão dos recursos da Álgebra:



$S_{\bigcirc} = S_{\square}$

$\pi R^2 = \ell^2 =$. Admitamos por exemplo R = 3

$\pi(3)^2 = \ell^2$

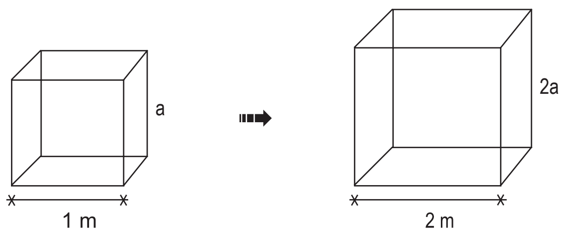
$\ell = 3\sqrt{\pi}$ ou $\ell = 5{,}31$

ou seja, se o problema da quadratura do círculo não apresenta solução geométrica nos moldes propostos pelos matemáticos helênicos, a solução é tivial com os recursos advindos da Álgebra.

Problema da duplicação do cubo ou problema deliano

Durante o cerco espartano da Guerra do Peloponeso, conta uma lenda que em 429 a.C. uma peste dizimou um quarto da população de Atenas, matando inclusive Péricles. Diz-se que uma plêiade de sábios fora enviada ao oráculo de Apolo, em Delos, para inquirir como a peste poderia ser eliminada.

O oráculo respondeu que o **altar cúbico de Apolo deveria ser duplicado**. Os atenienses celeremente dobraram as medidas das arestas do cubo.



A peste, em vez de se amainar, recrudesceu. Qual o erro?

Em vez de dobrar, os atenienses octoplicaram o volume do altar.

Veja o exemplo, considerando o $V_{cubo} = a^3$:

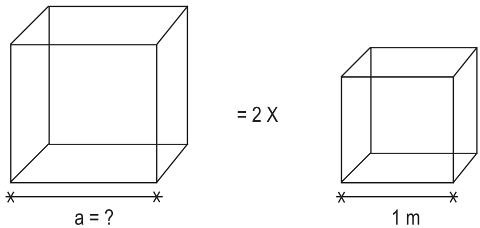
para a = 1 ⇨ $V_{cubo} = 1^3 = 1$

para a = 2 ⇨ $V_{cubo} = 2^3 = 8$

A complexidade do problema deve-se ao fato de que os gregos procuravam uma solução geométrica. E mais um complicador: com régua (sem escala) e compasso.

Ainda no século IV a.C., o geômetra grego Menaecmus (que juntamente com Platão foi professor de Alexandre, o Grande) resolveu o problema com o traçado de uma parábola e de uma hipérbole. Hodiernamente, tal solução é facilmente compreensível através da Geometria Analítica: Menaecmus obteve geometricamente o ponto de interseção da parábola $x^2 = 2y$ com a hipérbole $xy = 1$. A solução é $x = \sqrt[3]{2}$. Foi relativo o sucesso de Menaecmus entre os seus compatriotas: não se valeu de régua (sem escala) e compasso apenas!

A solução deste problema é trivial com os recursos da Álgebra: procura-se a aresta (a) de um cubo, cujo volume seja o dobro do volume de um cubo de a = 1 ($V_{cubo} = a^3$):



cálculo de a:

$a^3 = 2 \times 1^3$

$a = \sqrt[3]{2} \cong 1{,}26$

Conclusão: um cubo de $a = \sqrt[3]{2} \cong 1{,}26$ m tem o dobro do volume de um cubo cuja aresta seja 1 m.

Infere-se que os dois **problemas** clássicos da Geometria – **quadratura** do círculo e **duplicação** do cubo – têm solução trivial por meio da Álgebra.

OBSERVAÇÃO

Em 1837, o francês Pierre L. Wantzel demonstrou que o problema deliano não admite solução com uso de régua e compasso apenas. Com somente 23 anos, Wantzel, engenheiro da prestigiosa Ecole Polytech-nique, pôs fim às discussões de quase dois milênios. Em seu excelente Livro **O Romance das Equações Algébricas** (ed. Makron Books), Gilberto G. Garbi descreve que "esta limitação de apenas dois instrumentos espelhava o conceito de elegância com que os gregos tratavam das questões geométricas e, também, a ação tipicamente helênica que eles nutriam pelos desafios intelectuais, independentemente de qualquer utilidade prática".

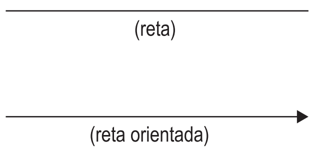
(do autor)

CAPÍTULO 2

RELAÇÕES SEGMENTÁRIAS NO ESPAÇO UNIDIMENSIONAL

O matemático e astrônomo alemão, Möbius (1790-1868) foi quem adotou a convenção de sinal às medidas de distâncias, ângulos, áreas e volumes.

1. RETA ORIENTADA

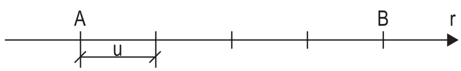


Uma reta é orientada, se estabelecermos nela um sentido de percurso como positivo; o sentido contrário é negativo. O sentido positivo é indicado por uma seta. Uma reta orientada também é chamada de eixo.

2. MEDIDA ALGÉBRICA DE UM SEGMENTO

Sejam dois pontos A e B pertencentes a uma reta orientada r. A medida algébrica do segmento finito e orientado $\overline{AB}$ é um número real, positivo se sua orientação for concordante com o sentido positivo da reta e é um número real negativo, em caso contrário. O número real que é a medida algébrica do segmento $\overline{AB}$ é representado por AB. Ao eixo se associa uma unidade de comprimento u.

Exemplo:



AB = + 4u (onde A é origem e B extremidade)

BA = –4u (onde B é origem e A extremidade)

Os segmentos orientados $\overline{AB}$ e $\overline{BA}$ têm respectivamente medidas algébricas iguais a 4 e –4.

Então: AB + BA = 0 ou **AB = – BA**

3. RAZÃO SIMPLES DE 3 PONTOS

Definição

Dados os pontos A, B e P, de uma reta r, denominamos razão simples desses pontos, nessa ordem, ao quociente, $\frac{AP}{BP}$ que é simbolizado por (ABP).

Assim:

$$(ABP) = \frac{AP}{BP}$$

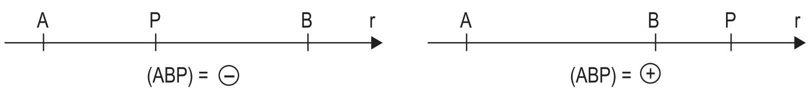
OBSERVAÇÃO

Se (ABP) = k, diremos que P divide o segmento $\overline{AB}$ na razão k.

Sinal

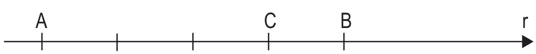
A razão simples (ABP) será positiva se o ponto P for externo ao segmento finito $\overline{AB}$. Se interno, a razão será negativa.

Assim:



Exemplos

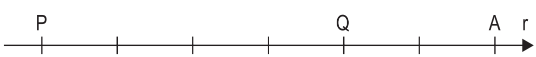
1.



$$(ABC) = \frac{AC}{BC} = \frac{3}{-1} = -3$$

O ponto C divide o segmento AB na razão simples igual a –3.

2.



$$(PQA) = \frac{PA}{QA} = \frac{6}{2} = 3$$

O ponto A divide o segmento $\overline{PQ}$ na razão simples igual a 3.

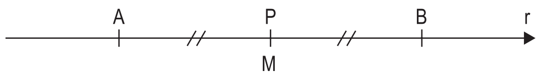
Casos particulares

1. Se P ≡ A, a razão simples é nula.



$$(ABP) = \frac{AP}{BP} = \frac{0}{BP} = 0$$

2. Se P ≡ M (ponto médio), a razão simples é igual a –1.



$$(ABP) = \frac{AP}{BP} = \frac{AP}{-AP} = -1$$

4. DIVISÃO ÁUREA

Definição

Um ponto P divide um segmento $\overline{AB}$ em média e extrema razão se:

$$AP^2 = AB \cdot PB$$

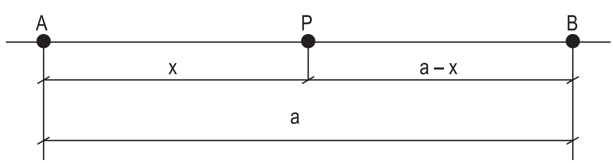
Diz-se também que AP é o segmento áureo de $\overline{AB}$.

OBSERVAÇÃO

Não prescindindo do rigor matemático, deve-se apresentar uma segunda relação para o segmento áureo: $PB^2 = AB \cdot AP$.

Cálculo

Dado o segmento AB = a, calcular o seu segmento áureo AP = x.



$AP^2 = AB \cdot PB$

$x^2 = a\,(a - x)$

ou

$x^2 + ax - a^2 = 0$

Resolvendo a equação do 2º grau para a incógnita x:

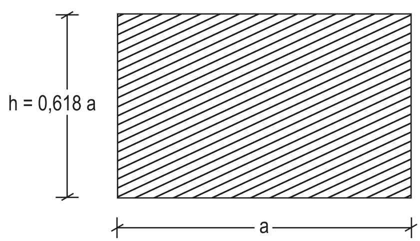
$$x = \frac{-a \pm \sqrt{5}a}{2}$$

Em problemas geométricos, adota-se a solução positiva:

$$x = \frac{-a + \sqrt{5}a}{2} = 0{,}618a$$

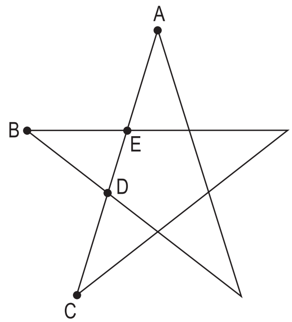
Epítome histórico

Na história da humanidade, o assunto em epígrafe sempre mereceu a atenção de matemáticos, artistas, arquitetos, etc., pois fornece as medidas de um retângulo na proporção mais estética. Para tanto, basta prefixar a base **a** e calcular a sua altura h = 0,618 a. É o **retângulo áureo**. Este é encontrado no frontispício do Paternon de Atenas (5º século a.C.), na pirâmide de Quéops, em pinturas de Leonardo da Vinci, em grandes catedrais da Idade Média e hodiernamente em projetos do renomado arquiteto francês Le Corbusier. Também a sábia natureza, como se observa em plantas, animais e em medidas do corpo humano. Recebeu o epíteto de sectio divina (secção divina) e Johannes Kepler (1571-1630) não se conteve: "a geometria tem dois tesouros. Um é o teorema de Pitágoras, e o outro é a divisão áurea".



O historiador grego Heródoto relata que os sacerdotes egípcios lhe haviam dito que as dimensões da pirâmides de Giseh haviam sido escolhidas de maneira que metade do comprimento da base e a altura da face triangular formassem a divisão áurea.

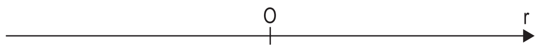
O pentagrama estrelado ao lado figurado representou a insígnia dos pitagóricos, o símbolo da saúde para os gregos e aparece hoje frequentemente em bandeiras, cartazes, etc.



Observe que:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AD} = \frac{ED}{AE} = 0{,}618 \quad \rightarrow \quad \text{divisão áurea}$$

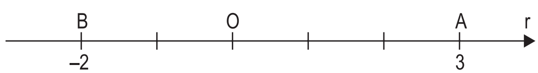
5. ABSCISSAS NA RETA



O ponto O (origem) divide o eixo r em duas semirretas, onde a semirreta positiva é indicada pela seta. É negativa a outra semirreta. Ao eixo se fixa *a priori* uma unidade de comprimento.

Chama-se abscissa x_1 de um ponto P_1 de uma reta orientada r, à medida do segmento orientado e finito $\overline{OP_1}$, da origem a esse ponto, antecedida do sinal de (+) ou (–) conforme o ponto pertença à semirreta positiva ou negativa. Há uma correspondência bijetiva entre os números reais e os pontos de uma reta.

Exemplo:



$x_A = 3$ $\qquad$ $x_B = -2$

OBSERVAÇÃO

Abscissa em latim significa **corte**, **incisão**. Deve-se provavelmente ao fato de que a representação da abscissa na reta se faz através de um pequeno corte.

6. DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS

Sejam os pontos P_1 e P_2, cujas abscissas são respectivamente x_1 e x_2.



Então:

$OP_1 + P_1P_2 = OP_2$
$P_1P_2 = OP_2 - OP_1$

$$P_1P_2 = x_2 - x_1$$

Exemplo:

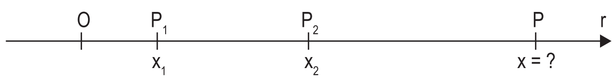
Dadas as abscissas $x_A = 5$ e $x_B = -3$, calcular AB e BA.

Resolução:

$AB = x_B - x_A = -3 - 5 = -8$
$BA = x_A - x_B = 5 - (-3) = 8$

7. RAZÃO SIMPLES DE 3 PONTOS POR SUAS ABSCISSAS

Sejam os pontos P_1, P_2 e P de uma reta orientada r, com abscissas x_1, x_2 e x respectivamente.



Determinar a abscissa x do ponto P que divide o segmento $\overline{P_1P_2}$ numa certa razão k.

Então:

$k = (P_1P_2P)$

$$k = \frac{P_1P}{P_2P} \qquad k = \frac{x - x_1}{x - x_2}$$

Isolando o x:

$$x = \frac{x_1 - kx_2}{1 - k}$$

Caso particular: se k = –1 tem-se:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Onde x é a abscissa do ponto médio de $\overline{P_1P_2}$.

Exemplo:

Achar a abscissa do ponto P que divide o segmento $\overline{AB}$ na razão 2. Dados $x_A = 3$ e $x_B = 7$.

Resolução:

$$x = \frac{x_A - kx_B}{1 - k} = \frac{3 - 2(7)}{1 - 2} = 11$$

Figura:


Portanto (ABP) = 11

Exercícios

"Que nenhum desconhecedor da Geometria entre aqui."
(Inscrição no frontispício da Academia de Platão)

01. O ponto P divide o segmento $\overline{P_1P_2}$ numa certa razão k. Calcular k, conhecendo-se respectivamente os pontos pelas suas abscissas x = 3, $x_1 = 6$ e $x_2 = -2$

Resp.: $k = \frac{-3}{5}$

02. Dados (ABP) = 5, $x_P = 2$, $x_B = 5$, calcular x_A.

Resp.: 17

03. Obter a abscissa do ponto P, tal que $P_A \cdot P_B = PC \cdot PD$.

Dados: $x_A = -2$, $x_B = 0$, $x_C = 3$, $x_D = 5$

Resp.: $\frac{3}{2}$

04. Considere O, A, B, C pontos colineares, onde O representa a origem. Calcule a abscissa x do ponto C na igualdade:

AB + 2CA + OB − 3BC = 3

Dados: $x_A = 2$ e $x_B = 5$

Resp.: $\frac{24}{5}$

05. Achar a distância QP tais que $(ABP) = -\frac{1}{2}$ e $(ABQ) = \frac{1}{2}$, sendo $x_A = 2$ e $x_B = 8$

Resp.: 8

06. Sendo $x_A = 3$ e $x_B = 8$, calcular as abscissas dos pontos P_1 e P_2 que dividem $\overline{AB}$ em 3 partes iguais.

Resp.: $\frac{14}{3}$ e $\frac{19}{3}$

07. Achar as abscissas dos pontos que dividem $\overline{PQ}$ em 4 partes iguais. Dados $x_P = -3$ e $x_Q = 6$

Resp.: $-\frac{3}{4}, \frac{3}{2}, \frac{15}{4}$

"Gigantes são os mestres nos ombros dos quais eu me elevei."

Isaac Newton (1642 - 1727), físico, astrônomo e matemático inglês.

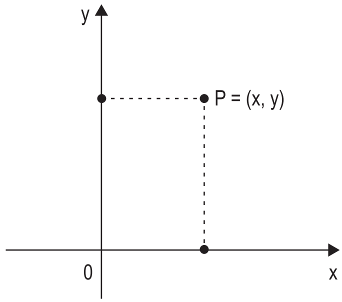
Fermat promove o maior desafio da Matemática



Pierre de Fermat

Jurista e magistrado por profissão, Pierre de Fermat (1601-1665), dedicava à Matemática apenas suas horas de lazer e, mesmo assim, foi considerado por Pascal o maior matemático de seu tempo.

Coube a Fermat a intodução de eixos perpendiculares, a descoberta das equações da reta e da circunferência, e as equações mais simples de elipses, parábolas e hipérboles. Por mérito, as coordenadas cartesianas deviam denominar-se coordenadas **fermatianas**.



Cartesius é a forma latinizada de Descartes (René). Foi mais filósofo que matemático e em sua obra **Discours de la Méthode** (3º apêndice, La Géométrie), publicada em 1637, se limitou a apresentar as ideias fundamentais sobre a resolução de problemas geométricos com utilização da Álgebra. Porém, é curioso observar que o sistema hoje denominado **cartesiano** não tem amparo histórico, pois sua obra nada contém sobre eixos perpendiculares, coordenadas de um ponto e nem mesmo a equação de uma reta. No entanto, Descartes "mantém um lugar seguro na sucessão canônica dos altos sacerdotes do pensamento, em virtude da têmpera racional de sua mente e sua sucessão na unidade do conhecimento. Ele fez soar o gongo e a civilização ocidental tem vibrado desde então com o espírito cartesiano de ceticismo e de indagação que ele tornou de aceitação comum entre pessoas educadas" (George Simmons). Segundo ainda este proeminente autor, La Géométrie "foi pouco lida então e menos lida hoje, e bem merecidamente".

E não há como resistir à tentação de expor um tópico lendário da Matemática: o **Último Teorema de Fermat**. Em 1637, estudando um exemplar da Aritmética de Diofanto (séc. III d.C.), Fermat deparou-se com o teorema: **A equação $x^n + y^n = z^n$ não admite solução para x, y, z inteiros e positivos, quando o expoente n for inteiro, positivo e maior que 2**.

No livro de Diofanto, Fermat anotou: "encontrei uma demonstração verdadeiramente admirável para este teorema, mas a margem é muito pequena para desenvolvê-la".

Naturalmente, há quem duvide que ele tenha dito a verdade. Porém, além de íntegro, moralmente idôneo, hábil na teoria dos números, lembramos que Fermat jamais cometeu um engano ou disparate matemático.

Gerações inteiras de matemáticos têm maldito a falta de espaço daquela margem. Por mais de três séculos, praticamente todos os grandes expoentes da Matemática (entre eles Euler e Gauss) debruçaram-se sobre o assunto. Com o advento dos computadores foram testados milhões de algarismos com diferentes valores para **x**, **y**, **z** e **n** e a igualdade $\mathbf{x^n + y^n = z^n}$ não se verificou. Assim, empiricamente comprova-se que Fermat tenha razão. Mas e a demonstração? Que tal um projeto para as suas próximas férias e alcançar a imortalidade?! Além disso, um renomado empresário e matemático alemão – Paul Wolfskehl – na noite que decidira suicidar-se em sua biblioteca, depara-se com o **Último Teorema de Fermat** e muda de ideia. Em seu testamento, deixou em 1906 a quantia de 100.000 marcos para quem o demonstrasse.

Em 1993, Andrew Wiles, matemático da Universidade de Princeton (EUA), após 30 anos de fascínio, interrupções e paciente obstinação, apresentou a sua demonstração em 140 páginas. A notícia ocupou espaço nos noticiários do mundo inteiro. Bom demais para ser verdadeiro: matemáticos encontram um erro. Mais uma vítima do Enigma de Fermat? Em 1996, Wiles reapresenta a demonstração e sobre a qual não há qualquer contestação.

Cumpre esclarecer que Wiles utilizou conceitos avançadíssimos, com os quais Fermat nem poderia ter sonhado. Assim chega o fim uma história épica na busca do Santo Graal da Matemática.

Propiciando notáveis avanços em vários ramos da Matemática, a saga de 359 anos de tentativas, erros e acertos está admiravelmente descrita no livro "O Último Teorema de Fermat", do autor inglês Simon Singh, com 300 páginas.

E o que pensa a comunidade dos matemáticos a respeito de Fermat? A maioria admite que ele escreveu com convicção que "a margem do livro era muito pequena", porém sua demonstração possuía erros.

Jocoso é o nova-iorquino anônimo que grafitou numa estação de metrô:

$$x^n + y^n = z^n$$

Descobri uma demonstração admirável para este teorema... porém, o trem está chegando!

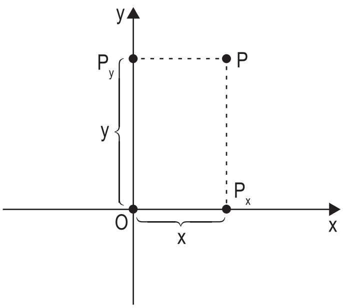
Que pena!

(Do autor)

SISTEMAS DE COORDENADAS NO ESPAÇO BIDIMENSIONAL

3 CAPÍTULO

1. SISTEMA CARTESIANO ORTOGONAL



Um sistema de eixos ortogonais no plano é constituído de duas retas orientadas x e y, perpendiculares entre si e de mesma origem O. A reta orientada x é denominada eixo x ou eixo das abscissas; a reta orientada y é denominada eixo y ou eixo das ordenadas; os eixos x e y são os eixos coordenados e dividem o plano em quatro partes ou quadrantes.

Por um ponto qualquer do plano traçam-se perpendiculares sobre cada um dos eixos, determinando neles os pontos P_x e P_y, de tal sorte que $x = OP_x$ e $y = OP_y$.

Destarte, podemos associar a cada ponto P do plano um par ordenado de números reais. Assim o ponto P fica determinado por suas **coordenadas cartesianas** ou também chamadas coordenadas retangulares:

$$P = (x, y)$$

onde x é **abscissa** de P e y a **ordenada** de P.

Reciprocamente, dado um par de números reais, localiza-se no plano um único ponto P. Há, portanto, uma correspondência bijetiva entre os pontos do plano e os pares de números reais.

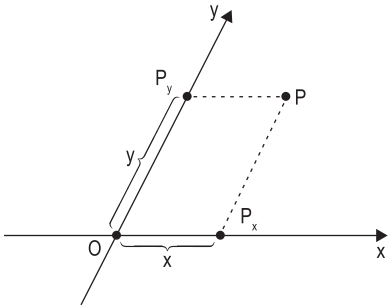
Particularidades

a) $O = (0, 0)$ → origem do sistema cartesiano.

b) $P_x = (x, o)$ → projeção ortogonal de P sobre o eixo das abscissas.

c) $P_y = (0, y)$ → projeção ortogonal de P sobre o eixo das ordenadas.

2. SISTEMA CARTESIANO OBLÍQUO



O sistema cartesiano será denominado oblíquo se o ângulo entre os eixos x e y não for de 90º. Propositalmente, em respeito à simplicidade olvidamos o estudo em eixos oblíquos. Tais sistemas monotonizam a exposição e dificultam sobremaneira a dedução e memorização de fórmulas.

3. PARES ORDENADOS: OPERAÇÕES E IGUALDADE

Adição

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

Exemplo:
(2, 5) + (1, –3) = (3, 2)

Multiplicação por um número real k

$$k\,(x_1, y_1) = (kx_1, ky_1)$$

Exemplo:
3 (5, –1) = (15, –3)

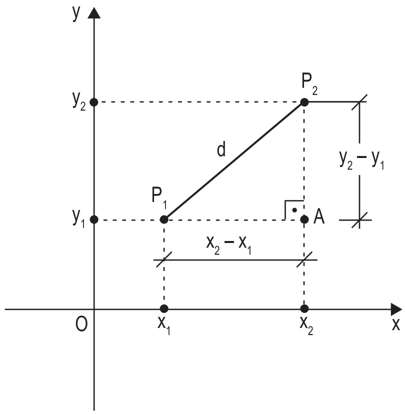
Igualdade de dois pares ordenados

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ e } y_1 = y_2$$

Exemplo:
(x – 1, y + 3) = (1, 7)

Donde: $x - 1 = 1 \rightarrow x = 2$
$y + 3 = 7 \rightarrow y = 4$

4. DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS



Dados dois pontos $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$, deseja-se calcular a distância d entre P_1 e P_2. Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo P_1AP_2, tem-se:

$$d_2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \text{ ou}$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Exercícios

"O oposto do amor não é o ódio, mas a indiferença."

Érico Veríssimo (1905-1975), romancista gaúcho.

01. Sendo A = (2, 3) e B = (1, 5), calcular as coordenadas cartesianas de P em $\frac{P + A}{2} = B$.

Resp.: P = (0, 7)

02. O segmento $\overline{AB}$ tem comprimento de 4 unidades. Conhecendo-se o ponto A = (–2, 1), achar a abscissa de B, cuja ordenada é 1.

Resp.: –6 e 2

03. Calcular a soma dos comprimentos das medianas do triângulo equilátero de vértices A = (3, 3), B = (–3, –3) e $C = (-3\sqrt{3},\ 3\sqrt{3})$.

Resp.: $9\sqrt{6}$

04. Dados os pontos A = (2, y), B = (–8, 4) e C = (5, 3), determinar y para que ABC seja um triângulo retângulo com ângulo reto no vértice A.

Resp.: y = –2 ou y = 9

05. Encontre o ponto P = (x, y) equidistante dos pontos $P_1 = (0, -5)$, $P_2 = (-1, 2)$ e $P_3 = (6, 3)$.

Resp.: P = (3, –1)

06. Determinar o ponto P, pertencente ao eixo das abscissas, sabendo que é equidistante dos pontos $A = (1, \sqrt{3})$ e $B = (2, \sqrt{2})$.

Resp.: P = (1, 0)

07. Dois vértices opostos de um quadrado são os pontos (1, 2) e (–5, 6). Determine a área do quadrado.

Resp.: 26

08. Sejam $M_1 = (2, -1)$, $M_2 = (1, -2)$ e $M_3 = (-1, 3)$ os pontos médios dos lados de um triângulo. Achar os vértices desse triângulo.

Resp.: (4, –6), (–2, 2), (0, 4)

09. Conhecendo-se os pontos A = (a, 0) e B = (0, a), achar as coordenadas do vértice C, sabendo-se que o triângulo ABC é equilátero.

Resp.: $C = \left(\dfrac{a \pm \sqrt{3}a}{2}, \dfrac{a \pm \sqrt{3}a}{2} \right)$

10. Um triângulo equilátero tem vértices A = (x, y), B = (3, 1) e C = (–1, –1). Calcular o vértice A.

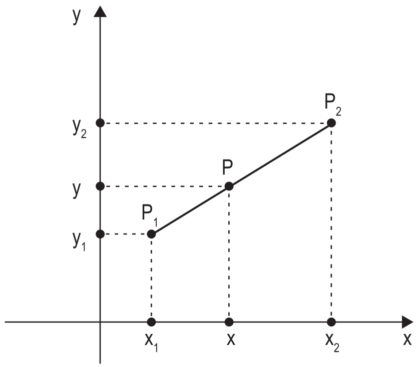
Resp.: $(1 + \sqrt{3},\ -2\sqrt{3})$ ou
$(1 - \sqrt{3},\ 2\sqrt{3})$

11. Calcular o centro da circunferência circunscrita ao triângulo de vértices A = (5, –6), B = (1, 2) e C = (3, –4).

Resp.: (11, 2) (circuncentro)

5. PONTO QUE DIVIDE UM SEGMENTO NUMA RAZÃO DADA

Seja o segmento de extremidades $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$. O ponto $P = (x, y)$ divide o segmento P_1P_2 numa razão dada k.



Então:

$$k = (P_1P_2P) = \frac{P_1P}{P_1P}$$

Introduzindo as coordenadas de P_1, P_2 e P

$$k = \frac{x - x_1}{x - x_2} \quad \text{e}$$

$$k = \frac{y - y_1}{y - y_2}$$

Isolando-se x e y:

$$x = \frac{x_1 - kx_2}{1 - k} \quad \text{e} \quad y = \frac{y_1 - ky_2}{1 - k}$$

Caso particular

Se k = –1, então o ponto P coincide com o ponto médio do segmento $\overline{P_1P_2}$. Donde se inferem as fórmulas:

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{e} \quad y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

6. BARICENTRO DE UM TRIÂNGULO

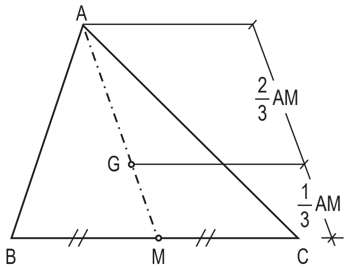
Definição

Baricentro ou centro de massa é o lugar onde se aplica uma força para se levantar o sistema em equilíbrio.

Geometricamente num triângulo, o baricentro é obtido pela intersecção das medianas.

Cálculo

Dado o triângulo de vértices A = (x_A, y_A), B = (x_B, y_B) e C = (x_C, y_C).



O baricentro G divide a mediana AM numa razão facilmente determinável:

$$(AMG) = \frac{AG}{MG} = \frac{2}{-1} = -2$$

Então: $\frac{AG}{MG} = -2$

Introduzindo as abscissas :

$$\frac{x_G - x_A}{x_G - x_M} = -2 \quad \text{ou} \quad x_G = \frac{x_A + 2x_M}{3} \qquad ①$$

Mas: $x_M = \frac{x_B + x_C}{2}$ ②

Substituindo-se ② em ① tem-se:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$$

Analogamente para a ordenada do baricentro obtém-se:

$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

Exercícios

> "Quando morreres, só levarás contigo aquilo que tiveres dado."
>
> *Saadi (1184-1291), poeta persa.*

01. Determinar as coordenadas dos pontos P_1 e P_2 que dividem o segmento A = (3, –1) e B = (0, 8) em 3 partes iguais.

Resp.: $P_1 = (2, 2)$ e $P_2 = (1, 5)$

02. Até que ponto da reta o segmento de extremos A = (1, –1) e B = (4, 5) deve ser prolongado no sentido de A para B para que o comprimento quintuplique?

Resp.: P = (16, 29)

03. O baricentro de um triângulo ABC é o ponto G = (4, 0) e M = (2, 3) o ponto médio de $\overline{BC}$. Achar as coordenadas do vértice A.

Resp.: A= (8, –6)

04. Num triângulo ABC, são dados os vértices A = (–4, 10) e B = (8, –1). Determinar o baricentro G e o vértice C, sabendo-se situados respectivamente sobre os eixos y e x.

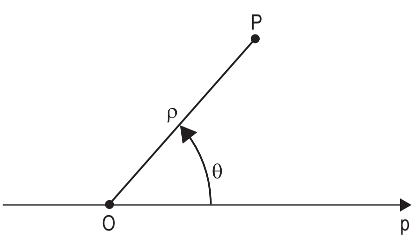
Resp.: G = (0, 3) e C = (–4, 0)

05. Calcular as coordenadas dos extremos A e B do segmento que é dividido em três partes iguais pelos pontos $P_1 = (-1, 3)$ e $P_2 = (1, 5)$.

Resp.: A = (–3, 1) e B = (3, 7)

7. SISTEMA POLAR

No plano, a importância do sistema polar só é suplantada pelo sistema cartesiano. É utilizado, entre outras disciplinas, em Cálculo Diferencial e Integral, na qual o sistema polar apresenta próceras vantagens. Mais especificamente, na representação de certas curvas e em problemas relativos a lugares geométricos. Na prática também é empregado na navegação, aviação etc.



O sistema polar é caracterizado no espaço bidimensional por uma reta orientada p e um ponto O pertencente a tal reta.

p → eixo polar do sistema

O → polo do sistema

O ponto P fica determinado no plano por suas coordenadas polares:

$$P = (\rho, \theta)$$

onde:

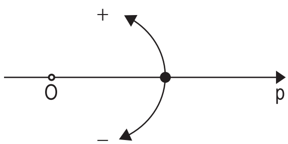
ρ = OP ($\rho \geq 0$) é a **distância polar ou raio vetor** de P.

θ ($0° \leq \theta < 2\pi$) é o **argumento**, **anomalia** ou **ângulo polar** de P.

Reciprocamente, dado um par ordenado de números reais, é possível localizar no plano um único ponto, do qual aqueles números são as coordenadas polares.

Convenção

O argumento θ será considerado positivo se sua orientação for a do sentido anti-horário e negativo se no sentido horário. O raio vetor r é positivo quando assinalado no lado terminal de θ e negativo quando no seu prolongamento.



OBSERVAÇÃO

Tenha-se presente que o argumento θ admite múltiplas determinações:

$$2k\pi + \theta$$

Representação gráfica de pontos

Na prática, utiliza-se o papel quadriculado polar em que o raio das circunferências concêntricas aumentam de 1 em 1 cm, e os ângulos de 15° em 15°. Compensa-se a ausência do papel quadriculado polar com régua milimetrada e transferidor.

Exemplos:

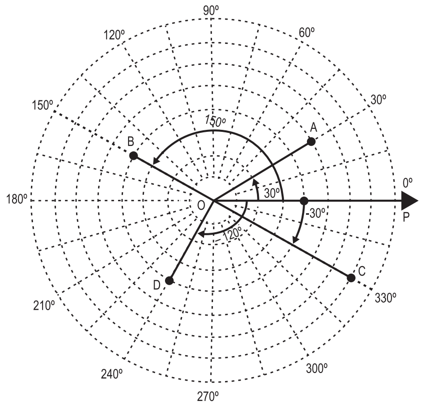
Representar os pontos em coordenadas polares:

A = (5, 30°)

B = (4,150°)

C = (7, –30°)

D = (4, –120°)



OBSERVAÇÃO

É lícito admitir-se a distância polar afetada do sinal de menos. Como $\rho = f(\theta)$ haverá uma correspondente alteração para θ. É fácil anuir na figura ao lado, que os pon tos C e D por exemplo, podem se apresentar com outras coordenadas polares.

Assim:
C = (7,330º) ou C = (–7,150º)
D = (4,240º) ou D = (–4,60º)

Gráfico de uma equação em coordenadas polares

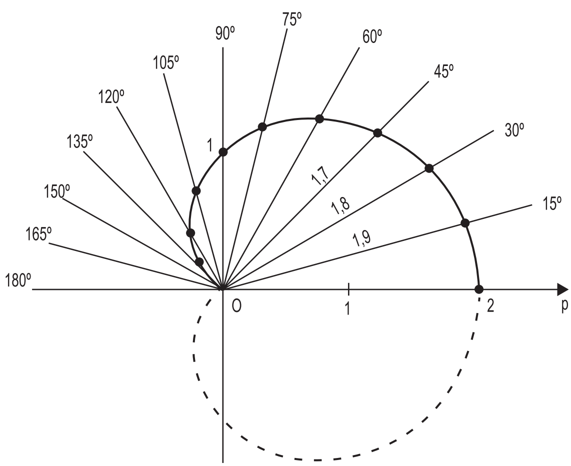
A representação gráfica de uma equação em coordenadas polares se obtém arbitrando-se valores para a variável independente θ e calculando-se os correspondentes valores para ρ.

Exemplo:

Construir o gráfico de $\rho = 1 + \cos \theta$.

TABELA DE VALORES

θ	0	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°	180°
ρ	2,0	1,9	1,8	1,7	1,5	1,2	1,0	0,7	0,5	0,2	0,1	0,03	0,0

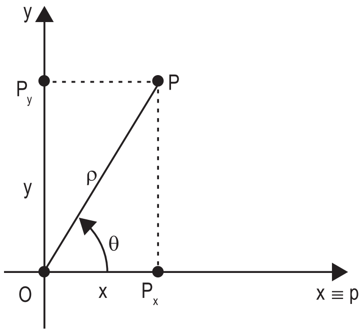


OBSERVAÇÃO

A curva da página anterior, denominada **cardioide**, apresenta simetria em relação ao eixo polar p, pois cos θ é igual a cos $(-\theta)$.

8. PASSAGEM DO SISTEMA POLAR PAR A O SISTEMA CARTESIANO ORTOGONAL

Por vezes, é oportuno passar de um referencial cartesiano para um polar; ou de um polar para o cartesiano.



Fazendo o eixo polar p coincidir com o eixo cartesiano x e O concomitantemente polo e origem dos dois sistemas.

Portanto:

P = (x, y) → coordenadas cartesianas

P = (ρ, θ) → coordenadas polares

Do triângulo retângulo OPxP, obtêm-se as relações:

1) $\rho^2 = x^2 + y^2$

2) $x = \rho \cos \theta$

3) $y = \rho \text{ sen } \theta$

4) $\text{tg}\theta = \dfrac{y}{x}$

OBSERVAÇÃO

Além dos dois sistemas mencionados, há outros menos usuais, quais sejam: sistema bipolar, sistema polo-diretriz, sistema de coordenadas baricêntricas, etc.

Exercícios

"É bom ter dinheiro e as coisas que o dinheiro pode comprar. Mas é bom também verificar de vez em quando se não estamos perdendo as coisas que o dinheiro não pode comprar."

George Horace Lorimer (1867-1937), jornalista americano

01. Passar do sistema cartesiano para o sistema polar:

a) $A = (-3,\ 3\sqrt{3})$

Resp.: $\left(6,\ \frac{2\pi}{3}\right)$

b) $B = (3\sqrt{3},\ 3)$

Resp.: $\left(6,\ \frac{\pi}{6}\right)$

c) $x^2 + y^2 - 3x = 0$

Resp.: $\rho(\rho - 3\cos\theta) = 0$

d) $(x^2 + y^2)^2 = 3(x^2 - y^2)$

Resp.: $\rho^4 = 3\rho^2 \cos 2\theta$

e) $x^2 + y^2 + xy = 5$

Resp.: $\rho^2\left(1 + \frac{1}{2}\text{sen}2\theta\right) = 5$

f) $x + y - 2 = 0$

Resp.: $\rho = \dfrac{2}{\text{sen}\ \theta + \cos\ \theta}$

01. Passar do sistema polar para o sistema cartesiano.

a) $P = \left(2,\ -\frac{\pi}{6}\right)$

Resp.: $(\sqrt{3},\ -1)$

b) $Q = \left(2,\ \frac{7\pi}{6}\right)$

Resp.: $(-\sqrt{3},\ -1)$

c) $\rho^2 = k^2 \text{ sen } 2\theta$

Resp.: $(x^2 + y^2)^2 = 2k^2xy$

d) $\rho^2 \cos^2 2\theta = 2$

Resp.: $(x^2 - y^2)^2 = 2(x^2 + y^2)$

01. Achar as coordenadas polares do ponto simétrico de $A = \left(2, -\frac{\pi}{3}\right)$ em relação ao eixo polar.

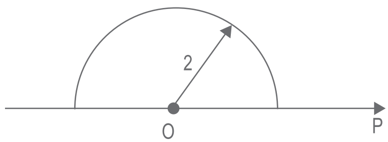
Resp.: $\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$

02. Idem para o ponto B de coordenadas cartesianas (4, –3).

Resp.: $\left(5, \text{arc cos}\frac{4}{5}\right)$

03. Representar $\rho = 2$ e $0 \le \theta \le \pi$

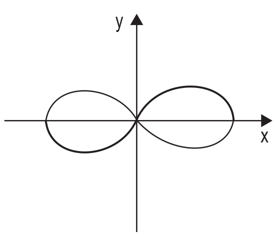
Resp.: (semicircunferência de raio igual a 2)



04. Transformar a equação $\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$, do sistema polar para o sistema cartesiano.

Resp.: $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$

OBSERVAÇÃO



Tal curva do 4º grau, descoberta por Jacques Bernoulli, é denominada Lemniscata (do grego *lemnisko*, que significa ornato, laço de fita),

Série B

05. Passar do sistema polar para o sistema cartesiano:

a) $\rho = k\theta$

Resp.: $x^2 + y^2 = k^2 \left(\text{arc tg} \frac{y}{x} \right)^2$ (espiral de Arquimedes)

b) $\rho = \frac{k}{\theta}$

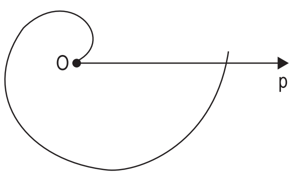
Resp.: $x^2 + y^2 = \frac{k^2}{\left(\text{arc tg} \frac{y}{x} \right)^2}$ (espiral hiperbólica)

c) $\log_a \rho = k\theta$

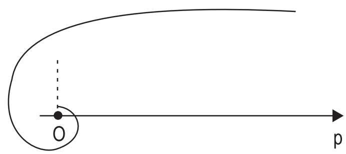
Resp.: $x^2 + y^2 = a^{2k\left(\text{arc tg} \frac{y}{x} \right)}$ (espiral logarítmica)

OBSERVAÇÃO

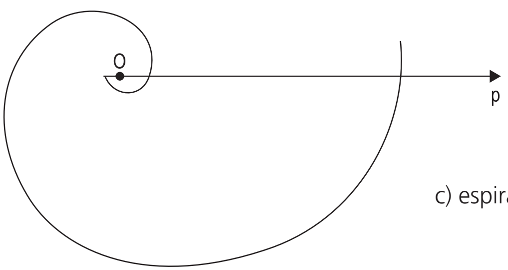
Apenas a título de curiosidade, representamos os respectivos gráficos:



a) espiral de Arquimedes



b) espiral hiperbólica



c) espiral logarítmica

A espiral logarítmica é aplicada em Mecânica dos Solos, por ser a forma admitida para as linhas de deslizamento de um maciço terroso.

01. Deduzir a fórmula da distância entre os pontos $P_1 = (\rho_1, \theta_1)$ e $P_2 = (\rho_2, \theta_2)$, em coordenadas polares.

Resp.: $d^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)$

SUGESTÃO

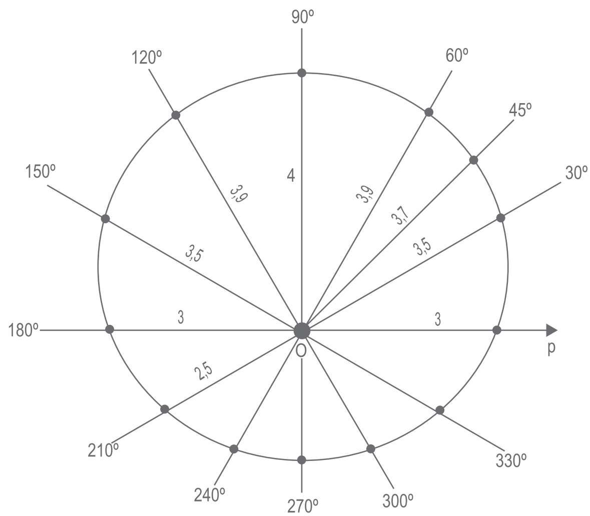
$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

Substitua:

$x_1 = \rho_1 \cos \theta_1$, $x_2 = \rho_2 \cos \theta_2$, $y_1 = \rho_1 \text{ sen } \theta_1$, $y_2 = \rho_2 \text{ sen } \theta_2$

02. Construir o gráfico de $\rho = 3 + \text{sen } \theta$.

Resp.:



"O melhor presente que uma sociedade pode dar a si mesma é a boa educação de seus filhos."
Cícero (106-43 a.C.), estadista, orador e escritor romano

Biblioteca de Alexandria

A destruição da Biblioteca de Alexandria, no Egito, às margens do Mar Mediterrâneo, talvez tenha representado o maior crime contra o saber em toda a história da humanidade.

Em 48 a.C., envolvendo-se na disputa entre a voluptuosa Cleópatra e seu irmão, o imperador Júlio César manda incendiar a esquadra egípcia ancorada no porto de Alexandria. O fogo se propaga até as dependências da Biblioteca, queimando cerca de 500 mil rolos. Restaram aproximadamente 200 mil.

Depois que o imperador Teodósio baixou decreto proibindo as religiões pagãs, e o Bispo Teófilo – Patriarca da cidade, de 385 a 412 d.C. – determinou a queima de todas as seções que contrariavam a doutrina cristã.

Em 640 d.C., o califa Omar ordenou que fossem destruídos pelo fogo todos os livros da Biblioteca sob o argumento de que "ou os livros contêm o que está no Alcorão e são desnecessários ou contêm o oposto e não devemos lê-los".

Todos os grandes geômetras da Antiguidade se debruçaram sobre os seus vetustos pergaminhos e papiros. Euclides (325-265 a.C.) fundou a Escola de Matemática na renomada Biblioteca.

Fazia parte de seu acervo a mais conspícua obra de Euclides, *Os Elementos*, que constitui um dos mais notáveis compêndios de Matemática de todos os tempos, com mais de mil edições desde o advento da imprensa (a primeira versão impressa apareceu em Veneza, em 1482). Segundo George Simmons, "a obra tem sido considerada responsável por uma influência sobre a mente humana maior que qualquer outro livro, com exceção da Bíblia ".

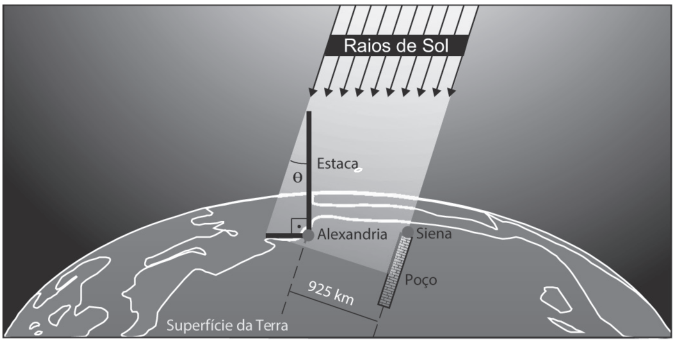
A já citada Biblioteca estava muito próxima do que se entende hoje por Universidade. E se faz apropriado o depoimento do insigne Carl B. Boyer, em *A História da Matemática*: "A Universidade de Alexandria evidentemente não diferia muito de instituições modernas de cultura superior. Parte dos professores provavelmente se notabilizou na pesquisa, outros eram melhores como administradores e outros ainda eram conhecidos pela capacidade de ensinar. Pelos relatos que possuímos, parece que Euclides definitivamente pertencia à última categoria. Nenhuma nova descoberta lhe é atribuída, mas era conhecido por sua habilidade de expor. Essa é a chave do sucesso de sua maior obra, *Os Elementos*".

Pela Trigonometria, um outro diretor da Biblioteca, Eratóstones (276-194 a.C.), comprovou a esfericidade da Terra e mediu com precisão e engenhosidade o perímetro de sua circunferência.

Num dos rolos de papiro, encontrou a informação de que na cidade de Siena (hoje Assuã), ao sul de Alexandria, ao meio-dia do solstício de verão (o dia mais longo do ano, 21 de junho, no Hemisfério Norte) colunas verticais não projetavam qualquer sombra; ou seja, o Sol se situava a prumo. Entretanto, o nosso conspícuo geômetra observou que no mesmo dia de solstício, as colunas verticais da cidade de Alexandria projetavam uma sombra perfeitamente mensurável.

Aguardou o dia 21 de junho do ano seguinte e determinou que se instalasse uma grande estaca em Alexandria e que se escavasse um poço profundo em Siena.

Ao meio-dia, enquanto o Sol iluminava as profundezas do poço de Siena (fazia ângulo de 90º com a superfície da Terra), em Alexandria, Eratóstenes mediu o ângulo θ = 7º12', ou seja: 1/50 dos 360º de uma circunferência.



Portanto, o comprimento do meridiano terrestre deveria ser 50 vezes a distância entre Alexandria e Siena.

Por tais cálculos, conjecturou que o perímetro da Terra seria de 46.250 km. Hoje sabemos que é de 40.076 km. Aproximação notável, considerando-se a época da medição.

Precedeu a experiência um feito digno de nota: Alexandria e Siena situavam-se a grande, porém, desconhecida distância. Para medi-la, Eratóstenes determinou que uma equipe de instrutores com seus camelos e escravos a pé seguissem em linha reta, percorrendo desertos, aclives, declives e tendo que, inclusive, atravessar o rio Nilo. Distância mensurada: 5.000 estádios ou cerca de 925 km. Ademais, as cidades de Alexandria e Siena não estão sobre o mesmo meridiano como supunha Eratóstenes, havendo uma diferença de quase 3º.

(Do autor)

SISTEMAS DE COORDENADAS NO ESPAÇO TRIDIMENSIONAL

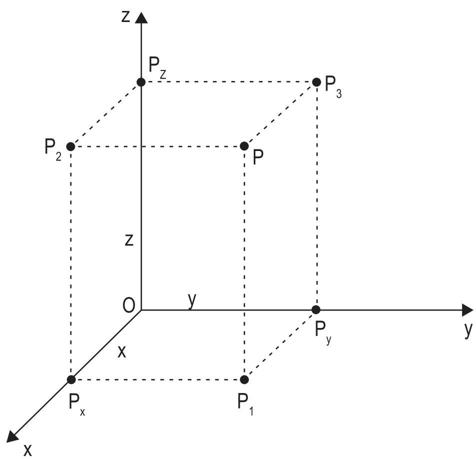
1. SISTEMA CARTESIANO ORTOGONAL

Em Geometria Analítica plana as equações contêm duas variáveis. Na espacial, três variáveis. Nesta exigir-se-á maior esforço de visualização das figuras. O conjunto de pontos do espaço tridimensional será indicado por E^3.

Sejam x, y e z três retas orientadas mutuamente perpendiculares entre si e concorrentes no ponto O. Destarte, o triedro (Ox, Oy, Oz) é trirretângulo.

Principais elementos:

- ponto O $\rightarrow$ origem do sistema cartesiano.
- retas orientadas $\rightarrow$ eixos cartesianos.
- planos xy, xz, yz $\rightarrow$ planos cartesianos.



Pelo ponto P traçam-se três planos paralelos aos planos coordenados e juntamente com estes individualiza-se um paralelepípedo retângulo, cujas faces interceptam os eixos x em P_x, y em P_y e z em P_Z.

Podemos associar a cada ponto P do espaço uma tripla de números reais. Assim o ponto P fica determinado por suas coordenadas cartesianas ortogonais:

$$P = (x, y, z)$$

onde:

$x = OP_x \rightarrow$ **abscissa**

$y = OP_y \rightarrow$ **ordenada**

$z = OP_z \rightarrow$ **cota**

O sistema cartesiano em estudo estabelece uma correspondência bijetora entre cada ponto do espaço e a terna de números reais. Os planos coordenados dividem o espaço em oito regiões, denominadas oitantes ou octantes.

Particularidades

a) $O = (0, 0, 0) \rightarrow$ origem do sistema cartesiano.

b) $P_1 = (x, y, 0)$, $P_2 = (x, 0, z)$, $P_3 = (0, y, z)$ representam as projeções ortogonais do ponto P sobre os planos coordenados xy, xz e yz.

c) $P_x = (x, 0, 0)$, $P_y = (0, y, 0)$, $P_z = (0, 0, z)$ representam as projeções ortogonais do ponto P sobre os eixos coordenados x, y e z.

d) Não sendo os eixos mutuamente perpendiculares temos um sistema de coordenadas oblíquas.

São válidas as operações de soma e multiplicação por escalar, com as triplas (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2), bem como a condição de igualdade de 2 triplas (item 3, do capítulo 3).

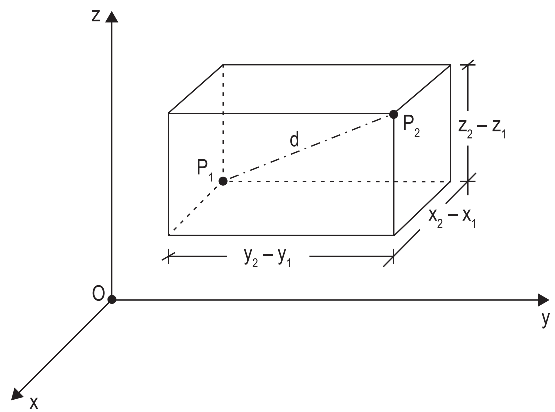
Um verdadeiro repto à Matemática hodierna foi e está sendo o estudo de espaços a quatro ou mais dimensões. Einstein, em sua Teoria da Relatividade, apoia-se em um espaço de quatro dimensões. E toda a nossa estrutura mental, fulcrada numa geometria euclidiana de duas ou três dimensões sofre uma vigorosa transformação. Por exemplo, num espaço de quatro dimensões (não representável geometricamente), a intersecção de dois planos pode ser um único ponto. Ou ainda, é factível a retirada de um objeto (ou um ponto) do interior de um paralelepípedo sem atravessar as suas paredes.

2. DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS

Dados dois pontos $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$, a distância d entre os pontos P_1 e P_2 é dada pela fórmula:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Para a demonstração, considere d a diagonal de um paralelepípedo de vértices opostos P_1 e P_2. Ou mais facilmente, veremos no capítulo 5 (multiplicação escalar de 2 vetores).



3. PONTO QUE DIVIDE UM SEGMENTO NUMA RAZÃO DADA

A demonstração é análoga ao espaço bidimensional. A determinação das coordenadas do ponto P = (x, y, z) que divide o segmento $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ numa certa razão k, se faz pelas fórmulas:

$$x = \frac{x_1 - kx_2}{1 - k} \qquad y = \frac{y_1 - ky_2}{1 - k} \qquad z = \frac{z_1 - kz_2}{1 - k}$$

Para k = –1, têm-se as coordenadas do ponto médio de $\overline{P_1P_2}$.

4. BARICENTRO DO TRIÂNGULO

Também aqui a dedução é análoga ao plano. Consideremos o triângulo de vértices $A = (x_A, y_A, z_A)$, $B = (x_B, y_B, z_B)$ e $C = (x_C, y_C, z_C)$. O baricentro G é obtido pelas fórmulas:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$$

$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \qquad z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$$

Exercícios

"Existe um paralelismo fiel entre o progresso social e a atividade matemática; os países socialmente atrasados são aqueles em que a atividade matemática é nula ou quase nula."

Jacques Chapellon (1639-1698), pensador francês

01. Calcular a soma das arestas do tetraedro regular de vértices
$A = (\sqrt{3}, 0, 1)$, $B = (-\sqrt{3}, 0, 1)$, $C = (0, 2\sqrt{2}, 2)$ e $D = (0, 0, 4)$

Resp.: $12\sqrt{3}$

02. Provar que os pontos A = (2, 0, 1), B = (3, 1, 5), C = (4, 2, 9) são colineares.

SUGESTÃO

Bastar verificar que $d_{AC} = d_{AB} + d_{BC}$

03. Achar o ponto do eixo das ordenadas equidistante dos pontos A = (1, –1, 3) e B = (2, 2, 1).

Resp.: $\left(0, \ -\frac{1}{3}, \ 0\right)$

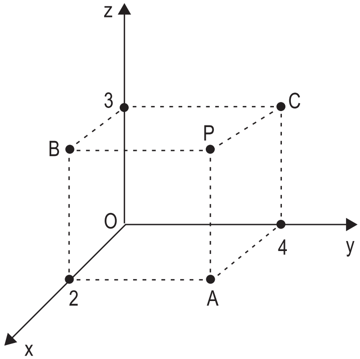
04. Verificar se os pontos A = (2, 1, 2), B = (1, 2, –1) e C = (–1, 0, –1) são vértices de algum triângulo retângulo.

Resp.: ABC é triângulo retângulo com ângulo reto em B.

SUGESTÃO

Calcule $\overline{AB}^2$, $\overline{BC}^2$, $\overline{AC}^2$ e observe que $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$ (Pitágoras).

05. Na figura, achar as coordenadas dos pontos A, B, C e P.



Resp.: A = (2, 4, 0)
B = (2, 0, 3)
C = (0, 4, 3)
P = (2, 4, 3)

06. Provar que o triângulo A = (1, 2, 0), B = (4, 0, -1) e C = (2, –1, 2) é equilátero.

07. Achar as coordenadas do ponto P que divide o segmento $\overline{AB}$ na razão 2. Dados A = (2, 5, –1) e B = (3, 0, –2).

Resp.: P = (4, –5, –3)

08. No sistema cartesiano ortogonal, determinar as distâncias do ponto P = (1,– 4, –2) aos eixos coordenados x, y e z.

Resp.: $2\sqrt{5}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{17}$

09. Achar os pontos do plano xz cuja distância ao ponto A = (1, 1, 0) é 2 e ao ponto B = (2, 0, 1) é 3 (Barsotti).

Resp.: $P = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ 0,\ \dfrac{-\sqrt{2}}{2} - 1\right)$ e $P' = \left(\dfrac{-\sqrt{2}}{2},\ 0,\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)$

10. Num triângulo ABC são conhecidos os vértices B = (2, 1, 3) e C = (0, 5, 4) e também o baricentro G = (1, 2, 3). Calcular o vértice A.

Resp.: A = (1 , 0, 2)

11. Os pontos A, B, M são colineares e M é o ponto médio de $\overline{AB}$. Sabendo-se que A = (1, 3, 5) e M = (0, 1, 2), achar as coordenadas carte-sianas do ponto B.

Resp.: B = (–1, –1, –1)

12. Calcular os vértices de um triângulo onde são dados o baricentro G = (2, 2, 3) e os pontos médios de dois lados, M_1 = (1, 2, 4) e M_2 = (2, 3, 3).

Resp.: (2, 0, 3), (0, 4, 5), (4, 2, 1)

13. Achar o volume da pirâmide de base OABC e P o vértice superior. Dados O = (0, 0, 0), A = (2, 0, 0), B = (2, 2, 0), C = (0, 2, 0) e P = (1, 1, 9).

Resp.: 12 u.v.

SUGESTÃO

A base é um quadrado, cujo lado é 2.
A altura h é a cota do ponto P, ou seja, h = 9.

$$V = \frac{1}{3}(S_{OABC})h$$

14. Até que ponto se deve prolongar o segmento de reta de extremidades A = (1, −1, 2) e B = (4, 5, 6) para que se triplique o seu comprimento no sentido de A para B?

Resp.: (10, 17, 14)

15. O ponto P pertence ao eixo z e equidista dos pontos A = (2, 3, 0) e B = (0, 1, 2). Encontrar P.

Resp.: P = (0, 0, −2)

16. Dados dois vértices A = (9, −5, 12) e B = (6, 1, 19) de um paralelogramo ABCD e P = (4,−1, 7) o ponto de intersecção de suas diagonais, determinar os vértices C e D.

Resp.: C = (−1, 3, 2) e D = (2, −3, −5)

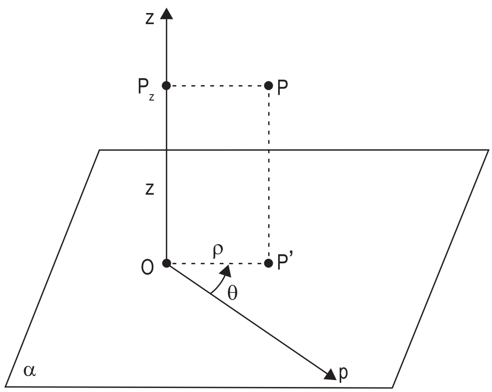
SUGESTÃO

As diagonais de um paralelogramo se bissecam em seu ponto médio.

5. SISTEMA CILÍNDRICO

No espaço tridimensional o sistema cartesiano reina quase soberanamente. Em alguns tópicos da engenharia e em cursos de licenciatura, dois outros sistemas também são usuais: o sistema cilíndrico e o sistema esférico.

a) Considere em um plano α um sistema polar, cujo polo é O e cujo eixo polar é p; além disso, considere um eixo z de origem O e ortogonal ao plano α. Dado um ponto qualquer P do espaço E^3, faz-se a seguinte construção, ilustrada na figura abaixo: P é projetado ortogonalmente sobre o plano α e sobre o eixo z; P' e P_z são as respectivas projeções.



Assim, ficam determinados três números ρ, θ e z que são suas coordenadas cilíndricas:

$P = (\rho, \theta, z)$ onde:

$\rho = OP'$ ($\rho \geq 0$) é a **distância polar ou raio vetor** de P.

θ ($0° \leq \theta < 2\pi$) é o **argumento, anomalia ou ângulo polar** de P.

$z = OP_z$ é a cota de P.

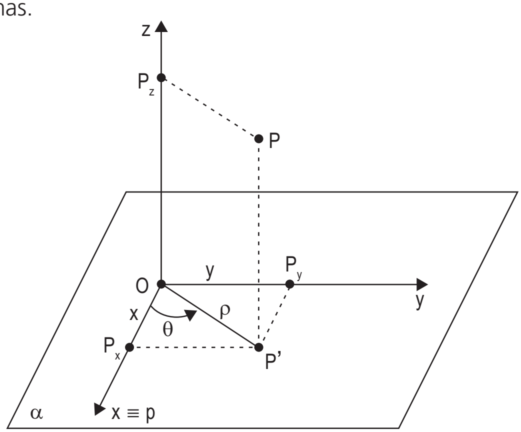
Reciprocamente, dado um terno ordenado de números reais, pode-se localizar um ponto no espaço, do qual os números dados são as coordenadas cilíndricas; portanto, há uma correspondência bijetora entre o conjunto dos pontos do espaço e o conjunto de ternos ordenados de números reais que são as coordenadas cilíndricas.

OBSERVAÇÃO

A denominação - **cilíndrica** - provém de na figura se admitir um cilindro de base circular, cujo raio é a constante ρ no plano α, e cuja geratriz é PP', que gira em torno de z.

b) Passagem do sistema cilíndrico para o sistema cartesiano ortogonal

Considera-se os dois sistemas de modo que o eixo polar coincida com o eixo das abscissas, o polo coincida com a origem e o eixo z seja comum para os dois sistemas.



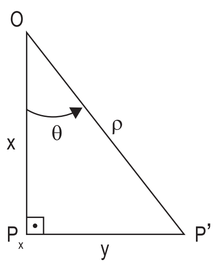
Então:

P = (x, y, z) em coordenadas cartesianas

P = (ρ, θ, z) em coordenadas cilíndricas

Observe-se que z é coordenada homônima para os dois sistemas.

O triângulo retângulo OP_xP' do plano α, estabelece as fórmulas:



1) $\rho^2 = x^2 + y^2$

2) $x = \rho \cos \theta$

3) $y = \rho \operatorname{sen} \theta$

4) $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{y}{x}$

Exercícios

"Como pode a Matemática, sendo produto do pensamento humano, independente da experiência, se adaptar tão admiravelmente aos objetos da realidade?"

Albert Einstein (1879-1955) físico alemão.
Naturalizou-se cidadão norte-americano em 1940.

01. Passar do sistema cartesiano para o sistema cilíndrico.

a) $A = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2\right)$

Resp.: $A = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\pi}{4}, 2\right)$

b) $B = (0, 1, 3)$

Resp.: $B = \left(1, \frac{\pi}{2}, 3\right)$

c) $(x^2 + y^2)^2 = z^2 (x^2 - y^2)$

Resp.: $\rho^4 = z^2 \rho^2 \cos 2\theta$

02. Efetuar a passagem do sistema cilíndrico para o sistema cartesiano.

a) $A = \left(6, \frac{2\pi}{3}, -2\right)$

Resp.: $A = (-3, 3\sqrt{3}, -2)$

b) $B = (1, 330°, \pi)$

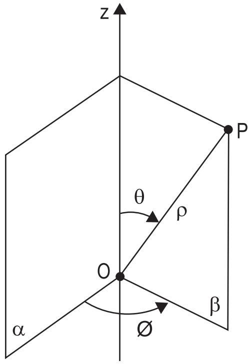
Resp.: $B = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, \pi\right)$

c) $\rho^2 \text{ sen } 2\theta = 2z^2$

Resp.: $xy = z^2$

6. SISTEMA ESFÉRICO

a) Seja O (polo) um ponto do espaço E^3 pelo qual passa uma reta orientada z (eixo polar). O plano α é passante por z. P um ponto do espaço tridimensional. O semiplano β de bordo z contém P.



Dado o ponto P, ficam determinados os três números ρ, θ e ø, que são suas coordenadas esféricas:

$$P = (\rho, \theta, \varnothing)$$

Onde:

ρ = OP, a **distância polar ou raio vetor** de P;

θ a **colatitude** de P – é a medida do ângulo que o eixo z forma com OP;

ø a **longitude ou azimute** de P – é a medida do ângulo que o plano α forma com o semiplano β.

Reciprocamente, dado um terno ordenado de números reais, é possível localizar no espaço um único ponto do qual os números do terno são as coordenadas esféricas.

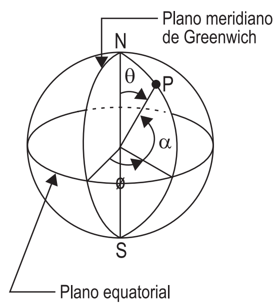
Para que a um ponto corresponda um único terno de coordenadas esféricas, costuma-se fazer as seguintes restrições:

$\rho \geq 0$

$0 \leq \theta \leq \pi$

$0 \leq \varnothing < 2\pi$

Na figura ao lado, tem-se uma aplicação notável do sistema esférico: as coordenadas geográficas de um ponto P. O ângulo ø é a longitude de P e θ a sua colatitude. Recorde-se da Geografia que colatitude é o complemento da latitude, esta representada na figura pelo ângulo α.



OBSERVAÇÃO

A denominação esférica provém do fato de se imaginar uma superfície esférica que contém P, de centro em O e cujo raio é a constante ρ.

b) Passagem do sistema esférico para o sistema cartesiano ortogonal

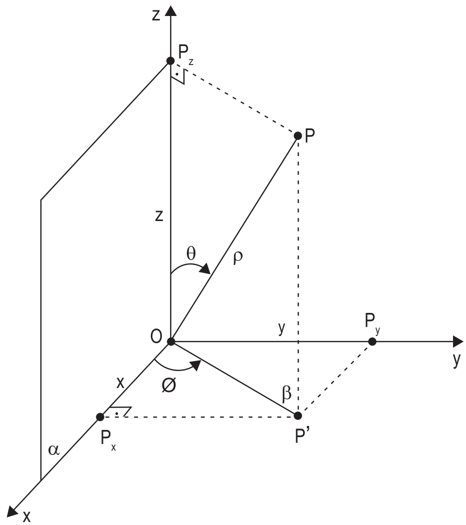
Faz-se coincidir o plano a com o plano xz. O ponto P tem projeções sobre os eixos cartesianos ortogonais em P_x, P_y e P_z.

O ponto P' é a projeção de P sobre o plano cartesiano xy.

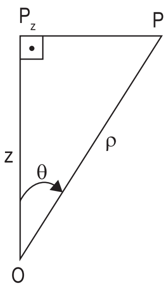
Em relação aos dois sistemas, tem-se:

P = (x, y, z) → coordenadas cartesianas de P.

P = (ρ, θ, ø) → coordenadas esféricas de P.



Por construção, observe-se que $P_zP = OP'$. Do triângulo retângulo OP_zP, obtém-se:

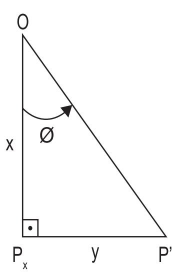


$P_zP = \rho \operatorname{sen} \theta$

e

$z = \rho \cos \theta$

O triângulo retângulo OP_xP' fornece:



- $x = OP' \cos ø$
  mas $OP' = P_zP = \rho \operatorname{sen} \theta$

  $x = \rho \operatorname{sen} \theta \cos ø$

- $y = OP' \operatorname{sen} ø$ ou

  $y = \rho \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} ø$

- $\operatorname{tg} ø = \dfrac{y}{x}$

Cálculo de ρ

Dos dois triângulos retângulos em destaque:

$OP'^2 = x^2 + y^2 = P_zP^2$

e

$\rho^2 = P_zP^2 + z^2$ ou $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$

Exercícios

> Grandes obras não nascem apenas de grandes ideias.

01. Passar do sistema cartesiano para o sistema esférico:

a) $A = (2, -2, 0)$

Resp.: $A = (2\sqrt{2},\ 90°, 315°)$

b) $B = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{-5\sqrt{2}}{2}\right)$

Resp.: $B = (5, 135°, 45°)$

c) $5x^2 - 5y^2 = 8z$

Resp.: $5\rho\ \text{sen}^2\ \theta \cos 2\ ø = 8 \cos \theta$

01. Transformar o sistema esférico em sistema cartesiano ortogonal:

a) $A = \left(12, \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}\right)$

Resp.: $A = \left(9,\ -3\sqrt{3},\ 6\right)$

b) $B = \left(5, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$

Resp.: $B = (0, -5, 0)$

c) $ø = 45°$

Resp.: $y = x$

SUGESTÃO

Multiplique ambos os membros pela tangente.

d) $\theta = 30°$

Resp.: $3(x^2 + y^2) = z^2$

SUGESTÃO

Multiplique ambos os membros pelo cosseno.

e) $\rho_2 - 3\rho \cos \theta = 0$

Resp.: $x^2 + y^2 + z^2 - 3z = 0$

01. Dadas as coordenadas esféricas de $P = (2\sqrt{2}, 45°, -30°)$, obtê-las em coordenadas cilíndricas.

Resp.: $P = (2, -30°, 2)$

SUGESTÃO

Sist. esférico → sist. cart. → sist. cilíndrico

02. Do sistema cilíndrico, passar para o sistema esférico:

$$A = \left(6, \frac{3\pi}{4}, 2\right)$$

Resp.: $A = \left(2\sqrt{10}, \text{ arc cos } \frac{\sqrt{10}}{10}, \frac{3\pi}{4}\right)$

O rato planejador

Dois ratos passeavam despreocupadamente. O primeiro rato vangloriava-se do seu doutorado em planejamento nos EUA. Fazendo tocaia, um gato saltou e pôs a pata em cima do segundo rato. Este, aterrorizado, suplicou ao rato planejador:

– O que você faz aí parado? Ajude-me!

– Estou planejando!

– Planejando o quê? Socorro!

– Já sei: vire um pit bull!

– Mas como?

– Bem... eu planejo, você tem que executar!

CAPÍTULO 5

VETORES

1. SINOPSE HISTÓRICA

A história da Matemática raramente apresenta eventos bombásticos. As formulações inicialmente tênues e difusas percorrem um espinhoso trajeto até atingir a magnitude de seu desenvolvimento.

O conceito de vetor surgiu na Mecânica com o engenheiro flamengo Simon Stevin - o "Arquimedes holandês". Em 1586 apresentou, em sua **Estática e Hidrostática**, o problema da composição de forças e enunciou uma regra empírica para se achar a soma de duas forças aplicadas num mesmo ponto. Tal regra, a conhecemos hoje como regra do paralelogramo.

Os vetores aparecem considerados como "linhas dirigidas" na obra **Ensaio sobre a Representação da Direção**, publicada em 1797 por Gaspar Wessel, matemático dinamarquês.

A sistematização da teoria vetorial ocorreu no século XIX com os trabalhos do irlandês William Hamilton (notavelmente precoce: aos 5 anos lia grego, latim e hebraico), do alemão Hermann Grassmann e do físico norte-americano Josiah Gibbs.

2. GRANDEZAS ESCALARES E VETORIAIS

Certas grandezas ficam determinadas apenas por um número real, acompanhado pela unidade correspondente. Por exemplo: 5 kg de massa, 10 m^2 de área, 12 cm de largura. Tais grandezas são chamadas de **escalares**. Outras grandezas necessitam além do número real, também de uma direção e de um sentido. Exemplificando: a velocidade, a aceleração, o momento, o peso, o campo magnético, etc. São as grandezas vetoriais.

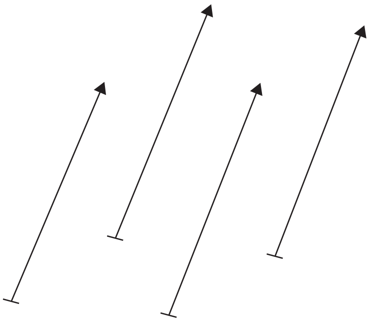
3. DEFINIÇÕES, ETIMOLOGIA E NOTAÇÕES

Vetor

DEF. 1: Vetor é uma tripla constituída de uma direção, um sentido e um número não negativo.

DEF. 2: Vetor é o conjunto de todos os segmentos orientados de mesma direção, de mesmo sentido e de mesmo comprimento.

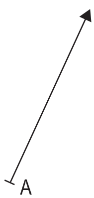
Imagem geométrica ou representante de um vetor



Na figura ao lado tem-se um conjunto de segmentos orientados de um único vetor. O segmento orientado é um conjunto de pontos, ao passo que vetor é um conjunto de segmentos orientados. Cada segmento orientado é, a rigor, a **imagem geométrica** ou o **representante** de um vetor.

A figura apresenta quatro segmentos orientados ou então quatro imagens geométricas de um mesmo vetor.

Como abuso de linguagem, emprega-se a palavra **vetor** em vez de **imagem geométrica do vetor**. De acordo com a locução *latina abusus non tollit usum* (o abuso não tolhe o uso) também nós vamos escrever ou verbalizar a palavra vetor como imagem geométrica do vetor.



Etimologia da palavra vetor

Provém do verbo latino *vehere*: transportar, levar. **Vetor** é o particípio passado de *vehere*, significando **transportado**, **levado**. Apesar de primitiva e até bizarra, a palavra vetor é pertinente: o ponto A é "transportado" até B.

Notações de vetor

I) Uma letra latina minúscula encimada por uma seta.

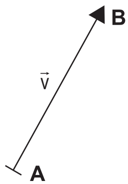
Exemplos:
$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ … $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ ...

II) Uma letra latina minúscula sobrelinhada.

Exemplos:
$\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ … $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$ ... (notação em desuso)

III) Dois pontos que são a origem e a extremidade de um representante do vetor.

Exemplo:
A soma do ponto A com o vetor $\vec{v}$ é o ponto B.



$A + \vec{v} = B$

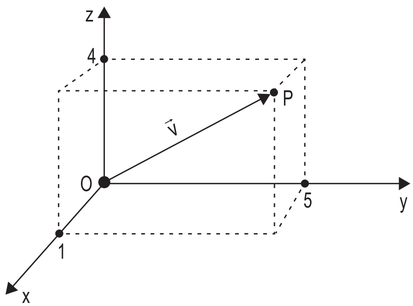
ou

$\vec{v} = B - A$

onde A é a **origem** e B é a **extremidade** do vetor.

Esta notação é assaz vantajosa pelas aplicações das operações algébricas e é devida ao matemático alemão H. Grassmann (1809-1877). Também bastante usual a notação $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$

IV) Uma terna ordenada de números reais : $\vec{v} = (x_1, y_1, z_1)$



Exemplo:

$\vec{v} = (1, 5, 4)$

Na figura $\vec{v} = (P - O)$

Como abuso de notação tem-se ainda

$\vec{v} = (P - O) = P$

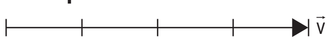
OBSERVAÇÃO

Usualmente, quando já estiver fixado o sistema de coordenadas, o representante do vetor é aquele cuja origem coincida com a origem do sistema.

Módulo ($|\vec{v}|$)

É o número não negativo que indica o comprimento do vetor.

Exemplo:



Então $|\vec{v}| = 4$

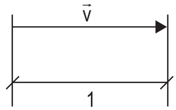
Vetor nulo ($\vec{o}$)

É o vetor de direção e sentido arbitrários, e módulo igual a **zero**. O vetor nulo tem coordenadas (0, 0, 0) e sua representação gráfica é a origem do sistema de coordenadas.

Vetor unitário

É o vetor de módulo igual a 1.

Exemplo:



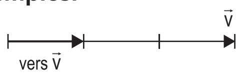
Então: $|\vec{v}| = 1$

Versor

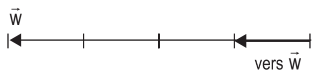
O versor de um vetor $\vec{v}$ não nulo, é o vetor unitário que tem a mesma direção e o mesmo sentido de $\vec{v}$.

$$\text{vers } \vec{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

Exemplos:

1. 

então $\text{vers } \vec{v} = \dfrac{\vec{v}}{3}$

2. 

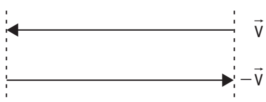
então $\text{vers } \vec{w} = \dfrac{\vec{w}}{4}$

O vetor unitário coincide com o seu próprio versor.

Vetor oposto

Dado um vetor $\overrightarrow{AB}$ o seu oposto é o vetor $\overrightarrow{BA}$ e se indica por $-\overrightarrow{AB}$. O vetor oposto de um vetor $\vec{v}$ é representado por $-\vec{v}$.

Exemplo:

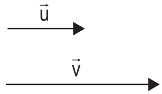


4. PARALELISMO DE VETORES

Definição

Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ de mesma direção são ditos paralelos. *Ipso facto*, suas imagens geométricas podem ser representadas sobre uma mesma reta.

Exemplo:



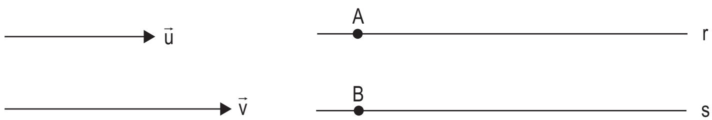
Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos e podem ser representados colinearmente:



OBSERVAÇÃO

Face o exposto até aqui, podemos associar ao conceito de vetor a ideia de translação. Tal ideia, como é sabido, não se transfere para retas paralelas, uma vez que estas possuem posições fixas e determinadas.

Exemplo:



Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos ou colineares.

No entanto, as retas r e s são paralelas e jamais colineares.

Vetores equiversos e contraversos

Dois vetores paralelos são **equiversos** se de mesmo sentido. Se de sentidos contrários, são **contraversos**.

Exemplo:



$\vec{u}$ e $\vec{v}$ são equiversos

$\vec{u}$ e $\vec{v}$ são contraversos

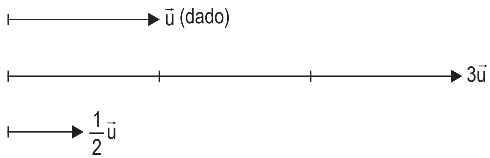
5. MULTIPLICAÇÃO DE UM VETOR POR UM ESCALAR

Definição

Seja k um escalar e $\vec{v}$ um vetor. O produto do vetor $\vec{v}$ pelo número real k é representado por $k\vec{v}$. Então, se:

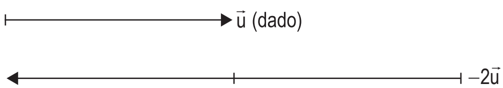
I) $k > 0$

Os vetores $\vec{v}$ e $k\vec{v}$ são equiversos.
Exemplos:



II) $k < 0$

Os vetores $\vec{v}$ e $k\vec{v}$ são contraversos.
Exemplo:



Casos particulares:

$0(\vec{v}) = \vec{0}$.
$k\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow k = 0$ ou $\vec{v} = \vec{0}$.
$(-1)\,\vec{v} = -\vec{v}$ onde $-\vec{v}$ é o oposto de $\vec{v}$.

Propriedades

Nas expressões abaixo, m e n são escalares quaisquer e $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são vetores arbitrários:

I) Propriedade associativa em relação aos escalares.

$$m(n\vec{v}) = n(m\vec{v}) = (mn)\,\vec{v}$$

II) Propriedade distributiva em relação à adição de escalares.

$$(m + n)\,\vec{v} = m\vec{v} + n\vec{v}$$

III) Propriedade distributiva em relação à adição de vetores.

$$m(\vec{v} + \vec{w}) = m\vec{v} + m\vec{w}$$

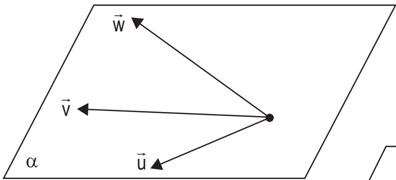
IV) Se $\vec{v} = (x_1, y_1, z_1)$, então:

$$m\vec{v} = m(x_1, y_1, z_1) = (mx_1, my_1, mz_1)$$

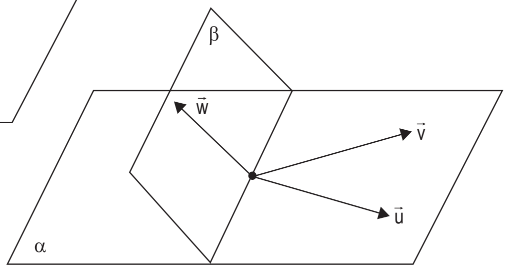
6. COPLANARIDADE DE VETORES

Os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são coplanares se tiverem imagens geométricas paralelas ao mesmo plano. Cumpre enfatizar: dois vetores são sempre coplanares, enquanto que três vetores podem ou não ser coplanares.

Exemplos:



$\vec{u}$ e $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são coplanares



$\vec{u}$ e $\vec{v}$ e $\vec{w}$ não são coplanares

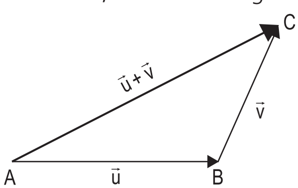
Convenção:

O vetor nulo é paralelo a qualquer vetor; é coplanar a qualquer conjunto de vetores coplanares.

7. ADIÇÃO DE VETORES

Definição

Dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, para se obter a soma $\vec{u} + \vec{v}$, fixamos um ponto qualquer A do plano $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e consideramos os pontos B = A + $\vec{u}$ e C = B + $\vec{v}$, conforme a figura; nessas condições, $\vec{u} + \vec{v}$ = (C − A).



Denotando por diferença de pontos:

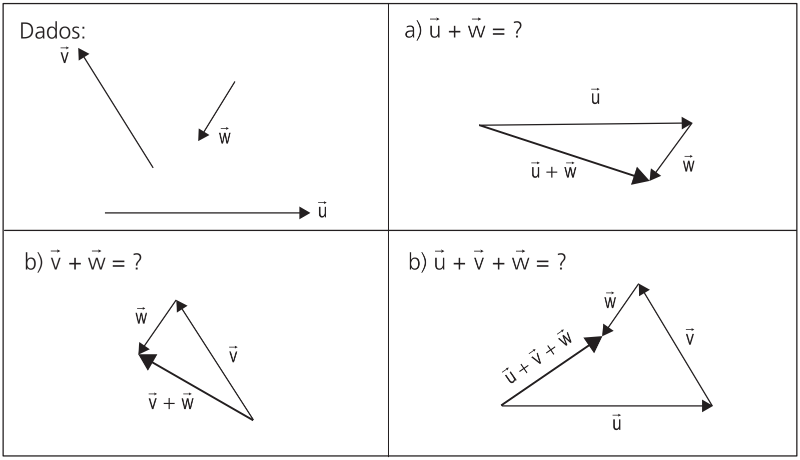
$\vec{u} + \vec{v}$ = (B − A) + (C − B) = (C − A)

Donde $\overrightarrow{AC}$ é o vetor resultante, obtido da adição de $\vec{u}$ com $\vec{v}$.

Geometricamente, a soma de n vetores (sendo n um número inteiro positivo qualquer) é feita considerando imagens geométricas dos vetores, de modo que a extremidade de cada vetor coincida com a origem do vetor seguinte; o vetor soma é o vetor que fecha a poligonal.

Exemplos:

Dados $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, obter graficamente a soma:



Graficamente, o vetor soma é o segmento orientado que fecha a poligonal, tendo por origem, a origem do primeiro vetor e por extremidade, a extremidade do último vetor.

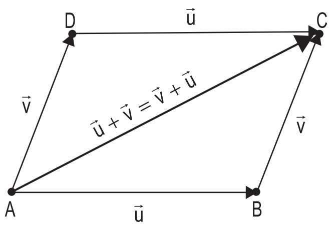
Sob a forma de triplas:

Dados os vetores

$\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$, então $\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$.

Propriedades

I) Comutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$



Demonstração: Considere as imagens geométricas dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, representados na figura.

1º membro:

$\vec{u} + \vec{v} = (B - A) + (C - B) = (C - A)$

2º membro:

$\vec{v} + \vec{u} = (D - A) + (C - D) = (C - A)$

donde $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (cqd)

Consequência

Regra do paralelogramo: A diagonal do paralelogramo construído sobre as imagens geométricas de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ representa a soma $\vec{u} + \vec{v}$.

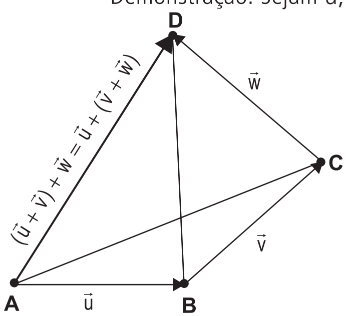
OBSERVAÇÃO

Sabe-se que o paralelogramo apresenta duas diagonais distintas. Para a "regra do paralelogramo" construído sobre as imagens geométricas de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ de mesma origem A, adota-se a diagonal que contém o ponto A.

A "regra do paralelogramo" é muito usual na composição de forças em Mecânica.

II) Associativa: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

Demonstração: Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores dados.



1º membro:

$(\vec{u} + \vec{v}) = (B - A) + (C - B) = (C - A)$

$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = (C - A) + (D - C) = (D - A)$

2º membro:

$(\vec{v} + \vec{w}) = (C - B) + (D - C) = (D - B)$

$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (B - A) + (D - B) = (D - A)$

Então:

$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ (qed)

III) Elemento neutro: $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$

IV) Elemento oposto: Dado um vetor $\vec{u}$, existe um único vetor indicado por $-\vec{u}$, tal que:

$\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$

O vetor $(-\vec{u})$ é o vetor oposto de $\vec{u}$.

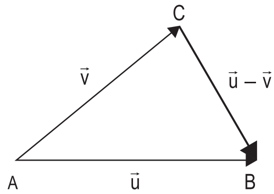
V) Lei do cacelamento: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{u} + \vec{w} \Rightarrow \vec{v} = \vec{w}$

8. SUBTRAÇÃO DE VETORES

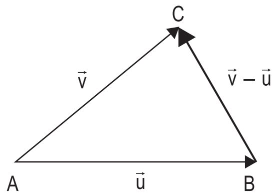
Definição

Dados os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, definimos a diferença $\vec{u} - \vec{v}$ por: $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$.

Denotando por diferença de pontos:



1º caso:
$\vec{u} - \vec{v} = (B - A) - (C - A) = (B - C)$

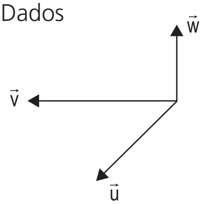
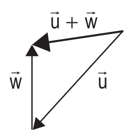
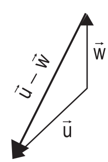
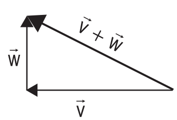
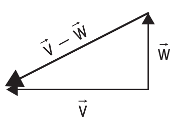
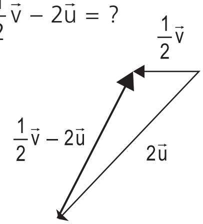


2º caso:
$\vec{v} - \vec{u} = (C - A) - (B - A) = (C - B)$

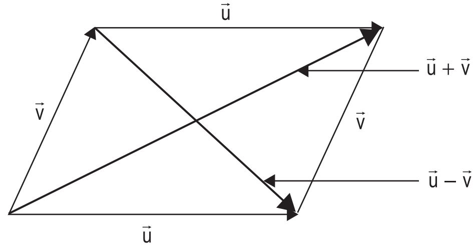
Graficamente, a diferença de dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é obtida fazendo-se com que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ tenham a mesma origem. A diferença de vetores não é comutativa: $\vec{u} - \vec{v} \neq \vec{v} - \vec{u}$.

Exemplos

1) Dados os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ obter graficamente:

Dados 	a) $\vec{u} + \vec{w} = ?$ 	b) $\vec{u} - \vec{w} = ?$ 
c) $\vec{v} + \vec{w} = ?$ 	d) $\vec{v} - \vec{w} = ?$ 	e) $\frac{1}{2}\vec{v} - 2\vec{u} = ?$ 

2) Num paralelogramo construído sobre dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, as diagonais são as imagens geométricas do vetor soma $\vec{u} + \vec{v}$ e do vetor diferença $\vec{u} - \vec{v}$.



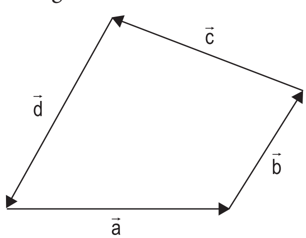
Exercícios

> "Quem quer fazer alguma coisa encontra um meio.
> Quem não quer fazer nada, encontra uma desculpa."
>
> *Aforisma árabe*

01. Determinar a origem A do segmento que representa o vetor $\vec{u} = (2, 3, -1)$, sendo sua extremidade o ponto B = (0, 4, 2).

Resp.: A = (–2, 1, 3)

02. Na figura abaixo o vetor $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$ é igual a:

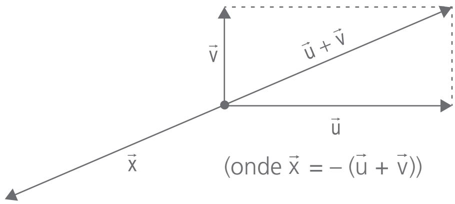


Resp.: $\vec{s} = \vec{o}$

03. Representados os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ na figura, achar graficamente o vetor $\vec{x}$ tal que $\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} = \vec{0}$.



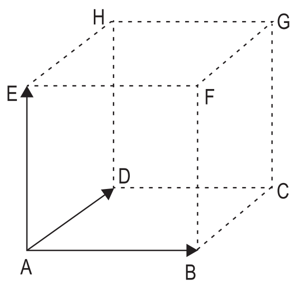
Resp.:



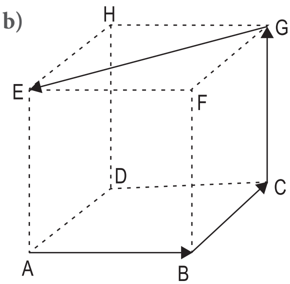
(onde $\vec{x} = -(\vec{u} + \vec{v})$)

04. Nos cubos abaixo, representar a soma dos vetores indicados com linha cheia.

a)



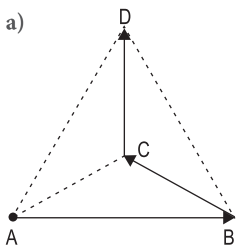
b)



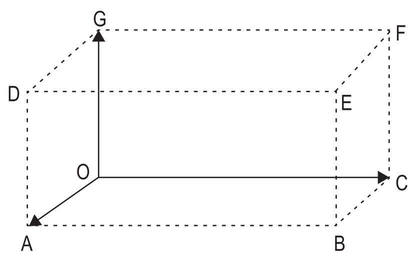
Resp.: a) (G – A) b) (E – A)

05. No tetraedro e no paralelepípedo retângulo, achar a soma dos vetores representados por suas imagens geométricas.

a)

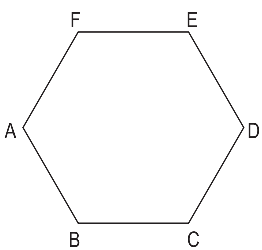


b)



Resp.: a) (D – A) b) (E – O)

06. No hexágono regular, obter:



a) (B – A) + (E – F) + (F – A)

b) (D – A) – (E – A) + (E – B)

Resp.: a) (D – A)

b) (D – B)

01. Dados $\vec{u} = (1, 2, 0)$, $\vec{v} = (2, 1, -1)$ e $\vec{w} = (0, 2, 3)$, achar:

a) $2\vec{u} - \vec{v} + 4\vec{w}$

b) $3(\vec{u} + \vec{v}) - 2(2\vec{v} - \vec{w})$

Resp.: a) (0, 11, 13)

b) (1, 9, 7)

01. Conhecidos A = (1, 3, 0), B = (5, 5, 2) e $\vec{v} = (1, 3, -2)$ calcular:

a) $A + \vec{v}$

b) $2A - 3B - \vec{v}$

Resp.: a) (2, 6, –2)

b) (–14, –12, –4)

09. Sendo A = (2, 0, 1), B = (0, 3, –2), C = (1, 2, 0), determinar D = (x, y, z), tal que $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$.

Resp.: D = (–3, 7, –7)

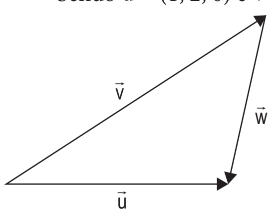
10. Calcular o vetor oposto de $\overrightarrow{AB}$ sendo A = (1, 3, 2) e B = (0, –2, 3).

Resp.: $\overrightarrow{BA} = (1, 5, -1)$

11. Conhecendo-se $\vec{u} = (1, 2, 0)$, $\vec{v} = (0, 1, 3)$ e $\vec{w} = (-1, 3, 1)$ calcular os escalares m, n e p em $m\vec{u} + n\vec{v} + p\vec{w} = (0, 0, 14)$.

Resp.: m = –1, n = 5, p = –1

12. Os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ formam um triângulo, conforme a figura.
Sendo $\vec{u} = (1, 2, 0)$ e $\vec{v} = (3, 0, 3)$, então $\vec{w}$ é igual a:



Resp.: (–2, 2, –3)

13. Determinar o vetor $\vec{x}$, tal que $5\vec{x} = \vec{u} - 2\vec{v}$, sendo $\vec{u} = (-1, 4, -15)$ e $\vec{v} = (-3, 2, 5)$.

Resp.: $\vec{x} = (1, 0, -5)$

14. Calcular P tal que $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

Dados A = (–1, –1, 0) e B = (3, 5, 0).

Resp.: $P = \left(\frac{5}{3},\ 3,\ 0\right)$

15. Sabendo-se que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são perpendiculares, tais que $|\vec{u}| = 5$ e $|\vec{v}| = 12$, calcular $|\vec{u} + \vec{v}|$ e $|\vec{u} - \vec{v}|$.

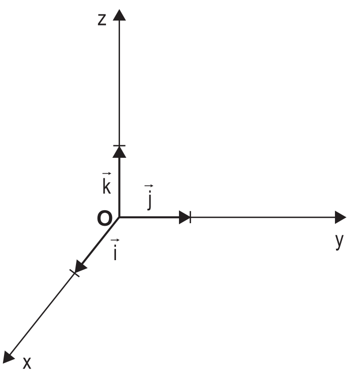
Resp.: 13 e 13

9. COMBINAÇÃO LINEAR DE VETORES

Considere os vetores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \dots \vec{u}_n$ e os escalares $k_1, k_2, k_3, \dots k_n$. Diz-se que $\vec{v}$ é **combinação linear** de $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \dots u_n$ quando escritos sob a forma de:

$$\vec{v} = k_1\vec{u}_1 + k_2\vec{u}_2 + k_3\vec{u}_3 + \dots k_n\vec{u}_n$$

10. EXPRESSÃO CARTESIANA DE UM VETOR



a) Seja x, y e z um sistema cartesiano ortogonal. Convencionou-se representar por $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$, nesta ordem, os versores dos eixos cartesianos ortogonais x, y e z.

Então:

$\vec{i} = (1, 0, 0)$

$\vec{j} = (0, 1, 0)$

$\vec{k} = (0, 0, 1)$

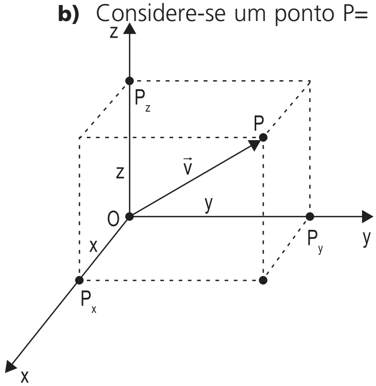
E pela definição de versor, que possui módulo unitário, tem-se:

$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$$

OBSERVAÇÃO

Os versores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ constituem uma base ortonormal de E^3 por ser formada de vetores unitários e mutuamente ortogonais.

b) Considere-se um ponto P= (x, y, z) do espaço tridimensional e $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ os versores dos eixos cartesianos ortogonais x, y e z. O vetor $\vec{v}$ =(P – O) tem origem em O e extremidade em P e pode ser expresso como combinação linear de $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$. Do paralelepípedo representado na figura ao lado obtém-se:



$(P – O) = (P_x – O) + (P_y – O) + (P_z – O)$

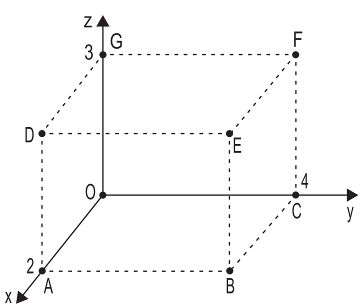
como $(P_x – O) = x\,\vec{i}$
$(P_y – O) = y\,\vec{j}$
$(P_z – O) = z\,\vec{k}$ tem-se

$$(P – O) = \vec{v} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\vec{k}$$

denominada **expressão cartesiana** do vetor (P – O), onde x, y e z são as **coordenadas** e $x\vec{i}$, $y\vec{j}$, $z\vec{k}$ as componentes do citado vetor. O vetor $\vec{v}$ representa a diagonal do paralelepípedo reto, cujas arestas são os vetores coordenadas $x\vec{i}$, $y\vec{j}$ e $z\vec{k}$.

OBSERVAÇÃO

Em particular o vetor (P – O) pode ter imagem geométrica num dos planos cartesianos. Por exemplo, se (P – O) estiver no plano xy, a 3.ª coordenada é nula: $(P – O) = x\vec{i} + y\vec{j}$.



Exemplos:

Do paralelepípedo retângulo obtém-se:

$(A – O) = 2\vec{i}$
$(C – O) = 4\vec{j}$
$(G – O) = 3\vec{k}$
$(B – O) = 2\vec{i} + 4\vec{j}$
$(D – O) = 2\vec{i} + 3\vec{k}$
$(F – O) = 4\vec{j} + 3\vec{k}$
$(E – O) = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$

11. CONDIÇÃO DE PARALELISMO DE DOIS VETORES

Teorema

Dois vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos se, e somente se, existir um escalar k tal que:

$$\vec{v} = k\vec{u}$$

Podemos afirmar que $\vec{v}$ é expresso linearmente em função de $\vec{u}$.

Demonstração:

1) Sendo $\vec{u}$ e $\vec{v}$ paralelos, os seus versores só podem diferir quanto ao sentido:

vers $\vec{v}$ = ± vers $\vec{u}$ ou

$$\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \pm\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} \text{ ou } \vec{v} = \pm\frac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|}\vec{u}$$

Como $\pm\frac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|}$ é um número real, chamemo-lo de k.

Donde $\vec{v} = k\vec{u}$ (cqd)

2) Reciprocamente, se $\vec{v} = k\vec{u}$, então $\vec{v}$ é paralelo a $\vec{u}$, pela definição de produto de vetor por escalar.

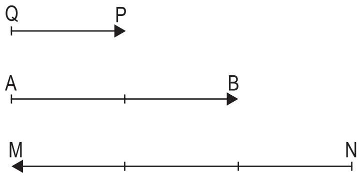
Vetores representados por pontos

A igualdade persiste se os vetores forem representados por pontos. Seja $\vec{u}$ = (B – A) e $\vec{v}$ = (C – D), então:

$$(C - D) = k(B - A)$$

Exemplos:

Enfatizando o paralelismo dos vetores representados por suas imagens geométricas, podemos afirmar que:



$$(B - A) = 2(P - Q)$$
$$(P - Q) = \frac{1}{2}(B - A)$$
$$(M - N) = -3(P - Q)$$
$$(B - A) = -\frac{2}{3}(M - N)$$

Vetores representados por triplas

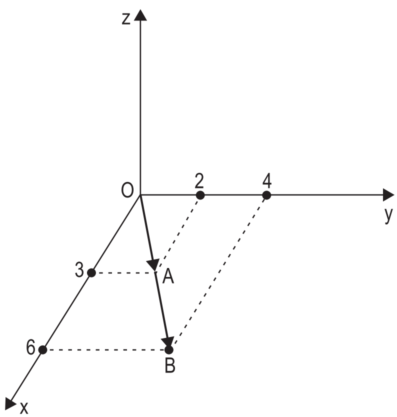
Sejam $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$. Pelo teorema, $\vec{u}$ é paralelo a $\vec{v}$ se, e somente se, existir um número real k tal que $\vec{v} = k\vec{u}$; ou ainda, $(x_2, y_2, z_2) = k(x_1, y_1, z_1)$. Explicitando o k, obtém-se a condição de paralelismo dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{z_2}{z_1} (= k)$$

Convenção:

A nulidade de um dos denominadores implica na nulidade do correspondente numerador.

Exemplo:



São paralelos os vetores

$\vec{u} = (3, 2, 0)$ e $\vec{v} = (6, 4, 0)$.

Na figura ao lado, $\vec{u} = (A - O)$ e $\vec{v} = (B - O)$. Observe que $\vec{v} = 2\vec{u}$, e que em particular os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm imagens geométricas no plano xy.

Exercícios

> "Sempre se ouvirão vozes em discordância, expressando oposição sem alternativa; discutindo o errado e nunca o certo; encontrando escuridão em toda a parte e procurando exercer influência sem aceitar responsabilidades."
>
> *John F. Kennedy (1917-1963), presidente dos EUA.*

01. Determinar x, sabendo-se paralelos os vetores:

a) $\vec{u} = (1, 3, 10)$ e $\vec{v} = (-2, x, -20)$

b) $\vec{v} = (0, 2, x)$ e $\vec{w} = (0, 3, 6)$

c) $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$ e $\vec{v} = x\vec{i} - 9\vec{j} - 3\vec{k}$

Resp.: a) $x = -6$ b) $x = 4$ c) $x = 6$

01. Sendo A, B, C, D vértices consecutivos de um paralelogramo, calcular as coordenadas do vértice D.

Dados: $A = (1, 3)$, $B = (5, 11)$ e $C = (6, 15)$

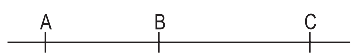
Resp.: $D = (2, 7)$

02. Seja ABDC um paralelogramo de vértices consecutivos na ordem escrita. Achar o vértice A, sabendo-se que $B = (0, 1, 3)$, $C = (2, 3, 5)$ e $D = (-1, 0, 2)$.

Resp.: $A = (-3, -2, 0)$

03. Provar que os pontos $A = (3, 1, 5)$, $B = (2, 0, 1)$ e $C = (4, 2, 9)$ são colineares.

SUGESTÃO

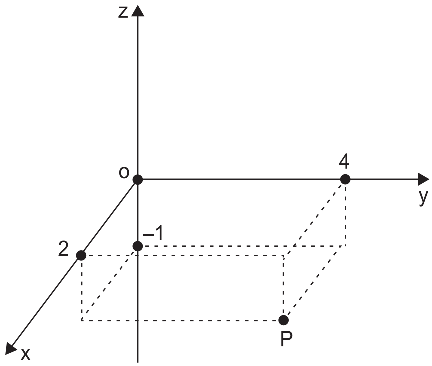


Por exemplo**:** os vetores (C – A) e (B – A) devem ser paralelos.

04. Calcular x e y sabendo que os pontos A = (1, –1, 3), B = (x, y, 5) e C = (5, –13, 11) são colineares.

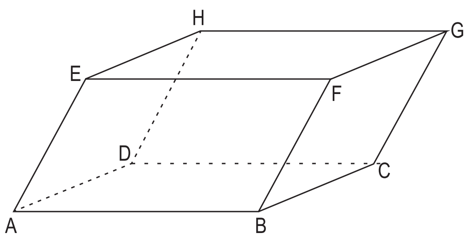
Resp.: x = 2 e y = –4

05. Na figura abaixo, obter a expressão cartesiana do vetor (P – O).



Resp.: $(P - O) = 2\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$

06. Seja o paralelepípedo representado na figura. Conhecendo-se os vértices B = (1, 2, 3), D = (2, 4, 3), E = (5, 4, 1) e F = (5, 5, 3), pedem-se os vértices A e G.



Resp.: A = (1, 1, 1)
G = (6, 8, 5)

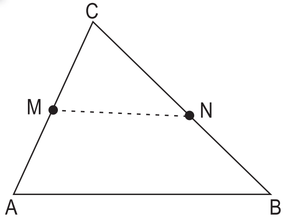
Série B

> "Uns nasceram para o martelo, outros para a bigorna."
>
> *François M. Voltaire (1694-1778), escritor francês.*

A Geometria Plana apresenta alguns próceros teoremas. Demonstre-os vetorialmente.

07. O segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e igual à sua metade.

SUGESTÃO



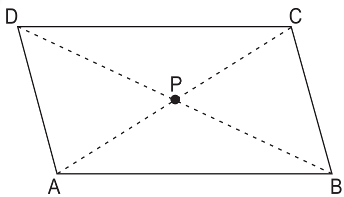
$$M = \frac{A + C}{2} \text{ e } N = \frac{B + C}{2}$$

Faça:

$$(M - N) = \frac{A + C}{2} - \frac{B + C}{2} = \frac{1}{2}(A - B)$$

08. As diagonais de um paralelogramo se bissecam.

SUGESTÃO



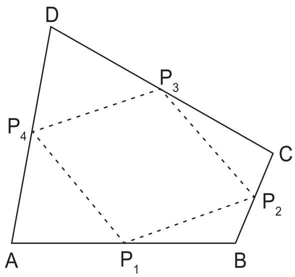
$$P = \frac{A + C}{2} = \frac{B + D}{2}$$

donde: $(A + C) = (B + D)$

ou $(A - B) = (D - C)$

09. Os pontos médios dos lados de um quadrilátero qualquer são vértices de um paralelogramo.

SUGESTÃO



$$P_1 = \frac{A + B}{2}; \; P_2 = \frac{B + C}{2};$$

$$P_3 = \frac{C + D}{2}; \; P_4 = \frac{A + D}{2};$$

subtraindo-se membro a membro:

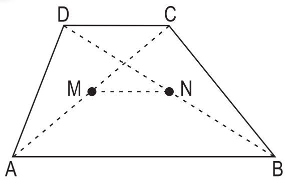
$$(P_1 - P_2) = \frac{1}{2}(A - C)$$

$$(P_4 - P_3) = \frac{1}{2}(A - C)$$

10. O segmento que une os pontos médios dos lados não paralelos de um trapézio é paralelo às bases e igual à sua semissoma.

11. O segmento que une os pontos médios das diagonais de um trapézio é paralelo às bases e tem comprimento igual à semidiferença dos comprimentos das bases.

SUGESTÃO

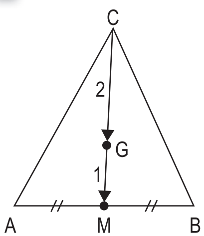


$$M = \frac{A + C}{2} \qquad N = \frac{B + D}{2}$$

Faça: (M – N)

12. Demonstrar vetorialmente que o baricentro G de um triângulo ABC é $G = \dfrac{A + B + C}{3}$

SUGESTÃO



Na figura:

(G – C) = 2(M – G)

Porém: $M = \dfrac{A + B}{2}$

12. CONDIÇÃO DE COPLANARIDADE DE VETORES

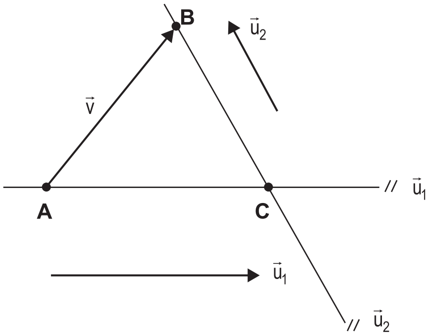
Teorema

O vetor $\vec{v}$ é coplanar aos vetores $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$ (não nulos e não paralelos entre si) se, e somente se:

$$\vec{v} = k_1\vec{u}_1 + k_2\vec{u}_2$$

Ou seja, se e somente se, $\vec{v}$ for **combinação linear** de $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$, sendo k_1 e k_2 escalares.

Demonstração:



Sejam $\vec{v}$, $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ vetores coplanares, (B – A) a imagem geométrica do vetor $\vec{v}$. Pela origem A conduzimos uma paralela ao vetor $\vec{u}1$, e pela extremidade B, uma paralela a $\vec{u}_2$. C é o ponto de intersecção de tais paralelas.

Então: $(C - A) = k_1\vec{u}_1$

$(B - C) = k_2\vec{u}_2$

Da figura: $(B - A) = (C - A) + (B - C)$

Substituindo: $\vec{v} = k_1\vec{u}_1 + k_2\vec{u}_2$ (qed)

Reciprocamente, é passível de demonstração:

se $\vec{v} = k_1\vec{u}_1 + k_2\vec{u}_2$

então os vetores $\vec{v}$, $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$ são coplanares.

Coplanaridade de vetores representados por triplas

Três vetores $\vec{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ e $\vec{v}_3 = (x_3, y_3, z_3)$ são coplanares se um deles for combinação linear dos outros dois. *Ipso facto*, o seu determinante deve ser nulo:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

Exemplo:

Os vetores $\vec{u} = (2, 3, 5)$, $\vec{v} = (3, 0, -1)$ e $\vec{w} = (7, 6, 9)$ são coplanares.

Exercícios

Segue sempre quem te dá pouco, e não quem muito te promete."

Provérbio chinês

01. Calcular **a** sabendo-se coplanares os vetores:
$\vec{u} = (1, 3, 0)$, $\vec{v} = (2, 1, 4)$ e $\vec{w} = (3, 4, a)$
$\vec{u} = a\vec{i} - 3\vec{j}$, $\vec{v} = a\vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{w} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

Resp.: a) 4, b) $\frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$

02. Provar que os pontos A = (4, 5, 1), B = (–4, 4, 4), C = (0, –1, –1) e D = (3, 9, 4) são coplanares.

SUGESTÃO

O determinante das coordenadas dos vetores (B – A), (C – A) e (D – A) é nulo.

03. Dados $\vec{u} = 2\vec{i}$, $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{w} = -2\vec{i} + 6\vec{j} + 6\vec{k}$, exprimir $\vec{w}$ como combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Resp.: $\vec{w} = -4\vec{u} + 6\vec{v}$

SUGESTÃO

$\vec{w} = k_1\vec{u} + k_2\vec{v}$
então $(-2, 6, 6) = k_1\ (2, 0, 0) + k_2\ (1, 1, 1)$

04. Sendo $\vec{u}_1 = (0, 2, -1)$, $\vec{u}_2 = (0, 1, 3)$ e $\vec{v} = (0, 3, 0)$ exprimir $\vec{v}$ como combinação linear de $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$.

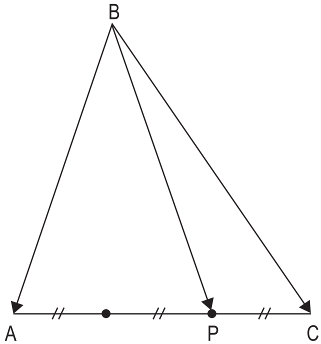
Resp.: $\vec{v} = \frac{3}{7}(3\vec{u}_1 + \vec{u}_2)$

05. Exprimir $\vec{w} = (-2, 6, 2)$ como combinação linear de $\vec{u} = (2, 0, 0)$ e $\vec{v} = (1, 1, 1)$.

Resp.: impossível

OBS.: De fato, os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ não são coplanares.

06. Considere a figura e expresse (P – B) como combinação linear de (A – B) e (C – B).

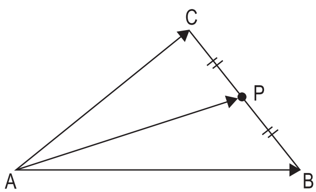


Resp.: $(P - B) = \frac{2}{3}(C - B) + \frac{1}{3}(A - B)$

SUGESTÃO

$(P - A) = 2(C - P)$, onde
$(P - A) = (P - B) - (A - B)$ e
$(C - P) = (C - B) - (P - B)$

07. Sendo P o ponto médio do lado BC do triângulo ABC, conforme a figura, exprimir (P – A) como combinação linear de (B – A) e (C – A).



Resp.: $(P - A) = \frac{1}{2}(B - A) + \frac{1}{2}(C - A)$

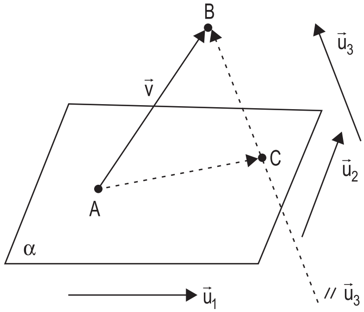
13. COMBINAÇÃO LINEAR DE 4 VETORES

Teorema

Sejam três vetores do espaço tridimensional $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ e $\vec{u}_3$, não nulos e não coplanares, então qualquer vetor $\vec{v}$ pode ser expresso como combinação linear de $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ e $\vec{u}_3$:

$$\vec{v} = k_1\vec{u}_1 + k_2\vec{u}_2 + k_3\vec{u}_3$$

Demonstração:



Fixemos no E^3 um ponto A e tracemos o plano α paralelamente a $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$ e passante por A. A imagem geométrica do vetor $\vec{v}$ é (B – A). Por B conduzimos uma paralela ao vetor $\vec{u}_3$, interceptando α no ponto C.

Do triângulo ABC:

(B – A) = (C – A) + (B – C) ①

Como (C – A) é coplanar a $\vec{u}_1$ e a $\vec{u}_2$:

$(C - A) = k_1\vec{u}_1 + k_2\vec{u}_2$ ②

Como (B – C) é paralelo a $\vec{u}_3$:

$(B - C) = k_3\vec{u}_3$ ③

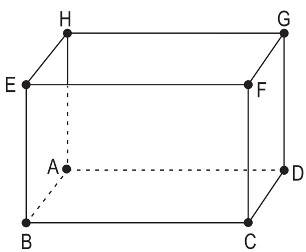
Substituindo ② e ③ em ①:

$\vec{v} = k_1\vec{u}_1 + k_2\vec{u}_2 + k_3\vec{u}_3$ (cqd)

Exercícios

> Que o jovem de hoje se transforme em locomotiva e não em vagões; em águias e não em ovelhas.

01. No paralelepípedo, expressar (F – A) como combinação linear de (C – D), (D – A) e (E – B).



Resp.: (F – A) = (C – D) + (D – A) + (E – B)

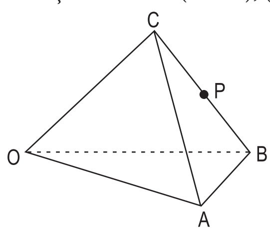
02. Sendo P o vértice de uma pirâmide cuja base é o paralelogramo ABCD, exprimir (D – P) como combinação linear de (A – P), (B – P) e (C – P).

Resp.: (D – P) = (A – P) + (C – P) – (B – P)

SUGESTÃO

Faça a figura, onde (D – A) = (C – B)
ou (D – P) – (A – P) = (C – P) – (B – P)

03. No tetraedro OABC, P é o ponto médio de $\overline{BC}$. Exprimir (P – A) como combinação linear de (A – O), (B – O) e (C – O).

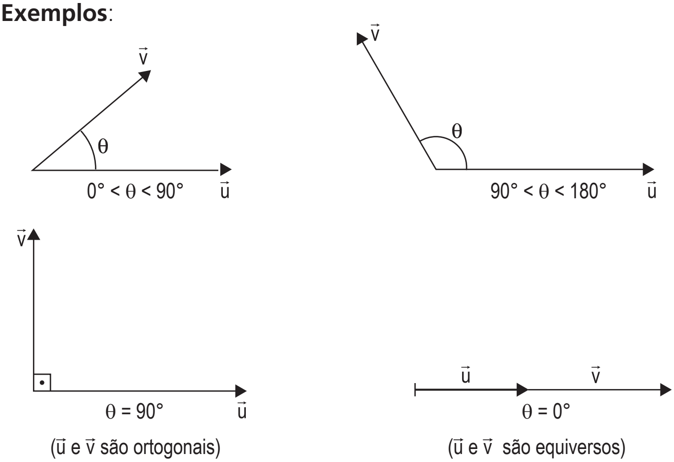


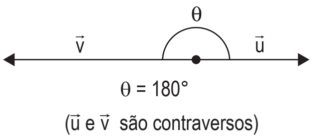
Resp.: $(P - A) = \frac{1}{2}(B - O) + \frac{1}{2}(C - O) - (A - O)$

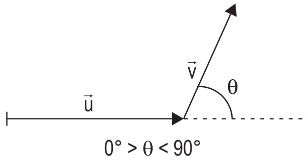
14. ÂNGULO DE DOIS VETORES

O ângulo $0° \leq \theta \leq 180°$ de dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é o ângulo formado entre suas direções, levando-se em consideração os sentidos de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Exemplos:







15. MULTIPLICAÇÃO INTERNA OU ESCALAR

SÍMBOLO: $\vec{u} \cdot \vec{v}$

A notação acima é devida ao físico norte-americano J. W. Gibbs (1839-1903).

OBSERVAÇÃO

Representa-se também $\vec{u} \times \vec{v}$ (notação em desuso).

DEFINIÇÃO

O produto interno ou escalar de dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é o número (escalar) tal que:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}| \cos\theta$$

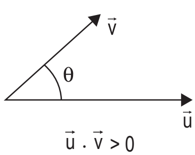
Onde $0° \leq \theta \leq 180°$ é a medida do ângulo formado entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

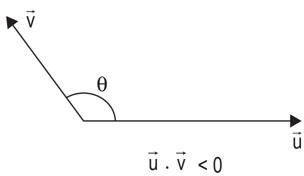
OBSERVAÇÃO

A operação de multiplicação escalar foi criada por Grassmann.

SINAL DO PRODUTO INTERNO

$\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$ indica que $\cos\theta > 0$, o que ocorre quando θ é ângulo agudo. Se $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$, então θ é ângulo obtuso.





Nulidade do produto escalar

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, se:

I) um dos vetores for nulo;

II) os dois vetores forem ortogonais, pois cos 90º = 0.

Módulo de um vetor

O módulo de um vetor $\vec{u}$ pode ser calculado através do produto interno, pois:

$\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|\,|\vec{u}| \cos 0^\circ$

Donde:

$$|\vec{u}|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} \Rightarrow \boxed{|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}}$$

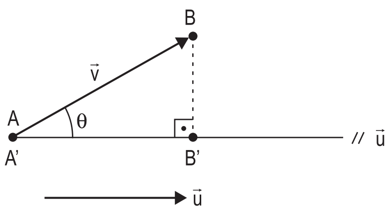
Ângulo de dois vetores

O cálculo do ângulo entre dois vetores se faz de forma trivial, isolando-se o cos θ na fórmula do produto escalar:

$$\boxed{\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|}}$$

Interpretação geométrica do produto escalar

Na figura A'B' é a **medida algébrica** da projeção do vetor $\vec{v}$ sobre a direção do vetor $\vec{u}$. Em símbolos:



$A'B' = proj_{\vec{u}}\vec{v}$

Do triângulo retângulo AB'B:

$A'B' = AB \cos\theta$

$= |\vec{v}| \cos 0$

Seja $\vec{u}^*$ o versor do vetor $\vec{u}$. A última igualdade não se altera se a multiplicarmos por $|\vec{u}^*|$.

$A'B' = |\vec{u}^*||\vec{v}|\cos\theta$

A igualdade persiste com $\vec{u}^* = \dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$:

$$\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|}$$

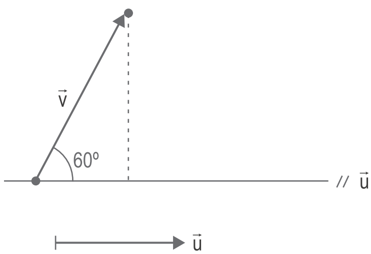
ou

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\,\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v}$$

Se o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ for agudo, a medida algébrica da projeção será positiva. Se obtuso, negativa.

Exemplo:

Dados $|\vec{u}| = 3$ e $|\vec{v}| = 2$ e $\widehat{\vec{u}\vec{v}} = 60°$, achar a **medida** da projeção do vetor $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$.



Resolução:

$\vec{u}\,.\,\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos 60°$

$= (3)\ (2)\left(\dfrac{1}{2}\right) = 3$

$\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|} = \dfrac{3}{3} = 1$

Propriedades do produto escalar:

I) Comutativa: $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$

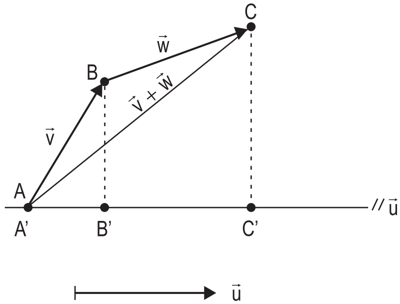
II) Associativa em relação à multiplicação por um escalar k:

$k(\vec{u}\cdot\vec{v}) = (k\vec{u})\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot(k\vec{v})$

III) Distributiva em relação à adição de vetores:

$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$

Demonstração: Na figura $\vec{v} = (B - A)$ e $\vec{w} = (C - B)$ e por consequência $\vec{v} + \vec{w} = (C - A)$. Os pontos A', B' e C' são as projeções ortogonais de A, B e C sobre uma reta paralela ao vetor $\vec{u}$.



Pelo teorema de Carnot:

A' C' = A'B' + B'C'

ou

$proj_{\vec{u}}AC = proj_{\vec{u}}AB + proj_{\vec{u}}BC$

ou ainda:

$proj_{\vec{u}}(\vec{v} + \vec{w}) = proj_{\vec{u}}\vec{v} + proj_{\vec{u}}\vec{w}$

Multiplicando os dois membros por $|\vec{u}|$ tem-se:

$$|\vec{u}|proj_{\vec{u}}(\vec{v} + \vec{w}) = |\vec{u}|proj_{\vec{u}}\vec{v} + |\vec{u}|proj_{\vec{u}}\vec{w}$$

igualdade que pela interpretação geométrica do produto interno pode ser escrita:

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \quad \text{(qed)}$$

Exemplo:

Sendo $|\vec{u}| = 4$, $|\vec{v}| = 5$ e $\widehat{\vec{u}\vec{v}} = 120°$, calcular:

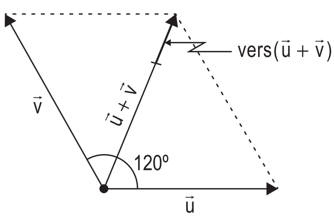
1. $|\vec{u} + \vec{v}|$

Resolução:

$$\begin{aligned} |\vec{u} + \vec{v}|^2 &= (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) \\ &= \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} \\ &= |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2|\vec{u}||\vec{v}| \cos\theta \\ &= (4)^2 + (5)^2 + 2(4)(5)\cos 120° = 21 \end{aligned}$$

Resp.: $|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{21}$

2. vers $(\vec{u} + \vec{v})$



Resolução:

$$\text{vers}\ (\vec{u} + \vec{v}) = \frac{\vec{u} + \vec{v}}{|\vec{u} + \vec{v}|} = \frac{\vec{u} + \vec{v}}{\sqrt{21}}$$

Exercícios

> "Sem liberdade, o ser humano não se educa.
> Sem autoridade, não se educa para a liberdade."
> *Jean Piaget (1896 -1980), educador e epistemologista suíço*

01. Calcular $|\vec{u} + \vec{v}|$ e o versor de $(\vec{u} + \vec{v})$, sabendo-se que $|\vec{u}| = 4$, $|\vec{v}| = 6$ e $\widehat{\vec{u}\vec{v}} = 60°$.

Resp.: $2\sqrt{7}$ e $\dfrac{\vec{u} - \vec{v}}{2\sqrt{7}}$

02. Sendo $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 3$, $|\vec{w}| = 4$, $\widehat{\vec{u}\vec{v}} = 90°$ e $\widehat{\vec{v}\vec{w}} = 30°$, calcular:

OBS.: $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são coplanares.

a) $|\vec{u} + \vec{v}|$

Resp.: $\sqrt{13}$

b) vers $(\vec{u} + \vec{v})$

Resp.: $\dfrac{\vec{u} + \vec{v}}{\sqrt{13}}$

c) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{v} - \vec{u})$

Resp.: -5

d) $|\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}|$

Resp.: $\sqrt{21 + 12\sqrt{3}}$

e) o vetor $\vec{w}$ como combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$

Resp.: $\vec{w} = -\vec{u} + \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\vec{v}$

SUGESTÃO

$\vec{w} = k_1\vec{u} + k_2\vec{v}$

1) multiplique escalarmente por $\vec{u}$

2) multiplique escalarmente por $\vec{v}$

01. Determinar o ângulo $\widehat{\vec{u}\vec{v}}$, sabendo-se que $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$, $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 3$ e $|\vec{w}| = 4$.

Resp.: $\widehat{\vec{u}\vec{v}} = \text{arc}\ \cos\dfrac{1}{4}$

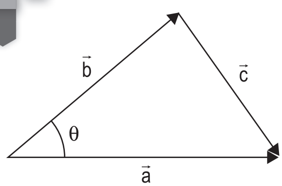
SUGESTÃO

$\vec{u} + \vec{v} = -\vec{w}$ ou

$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = (-\vec{w}) \cdot (-\vec{w})$

02. Provar a lei dos cossenos: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$

SUGESTÃO



$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$

$\vec{c} \cdot \vec{c} = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$

$|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$

$|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

03. Seja um paralelogramo construído sobre $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Determinar o ângulo θ entre as diagonais do paralelogramo.

Dados $|\vec{u}| = \sqrt{3}$, $|\vec{v}| = 1$ e $\widehat{\vec{u}\vec{v}} = \dfrac{\pi}{6}$

Resp.: $\theta = \text{arc}\cos\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$

SUGESTÃO

As diagonais são $\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{u} - \vec{v}$.

Então seu produto interno é $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = |(\vec{u} + \vec{v})|\,|(\vec{u} - \vec{v})| \cos\theta$

04. Calcular o ângulo entre os vetores $\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$ e $-\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}$, sabendo-se que $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$ e que $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são mutuamente ortogonais.

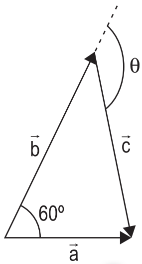
Resp.: $\dfrac{\pi}{3}$

05. Sendo $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ mutuamente ortogonais, demonstrar que:

a) $|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2$

b) $|\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2$

06. Na figura, calcular o ângulo θ entre os vetores $\vec{b}$ e $\vec{c}$, sendo $|\vec{a}| = \sqrt{2}$ e $|\vec{b}| = 2\sqrt{2}$

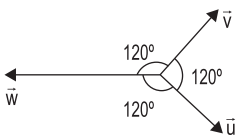


Resp.: $\frac{5\pi}{6}$

SUGESTÃO

Como $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ faça o produto escalar entre $\vec{b}$ e $\vec{a} - \vec{b}$.

07. Na figura estão representadas as imagens geométricas dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$. Sendo $|\vec{u}| = |\vec{v}| = 2$ e $|\vec{w}| = 4$, escrever $\vec{w}$ como combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.



Resp.: $w = -2(\vec{u} + \vec{v})$

08. Sabendo-se que os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ formam dois a dois ângulos de 60° e tais que $|\vec{u}| = 4$, $|\vec{v}| = 2$ e $|\vec{w}| = 1$.

Achar o módulo do vetor $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$.

Resp.: $|\vec{s}| = \sqrt{35}$

SUGESTÃO

Desenvolva o produto interno:
$\vec{s} \cdot \vec{s} = (\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) \cdot (\vec{u} + \vec{v} + \vec{w})$

16. EXPRESSÃO CARTESIANA DO PRODUTO ESCALAR

De extraordinária importância é a expressão cartesiana de $\vec{u} \,.\, \vec{v}$. Num sistema cartesiano ortogonal são conhecidos os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ por suas expressões cartesianas:

$$\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$$
$$\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$$

Dedução:

$$\begin{aligned} \vec{u}\cdot\vec{v} &= (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k})\cdot(x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) \\ &= x_1x_2\vec{i}\cdot\vec{i} + x_1y_2\vec{j}\cdot\vec{j} + x_1z_2\vec{i}\cdot\vec{k} + \\ &+ x_2y_1\vec{i}\cdot\vec{j} + y_1y_2\vec{j}\cdot\vec{j} + y_1z_2\vec{j}\cdot\vec{k} + \\ &+ x_2z_1\vec{i}\cdot\vec{k} + y_2z_1\vec{j}\cdot\vec{k} + z_1z_2\vec{k}\cdot\vec{k} \end{aligned}$$

No entanto:

$$\vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = |\,\vec{i}\,|^2 = |\,\vec{j}\,|^2 = |\,\vec{k}\,|^2 = 1$$
$$\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{i}\cdot\vec{k} = \vec{j}\cdot\vec{k} = 0$$

Donde:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

que é a **expressão cartesiana** do produto escalar. Desta também se infere a condição de **ortogonalidade** de $\vec{u}$ e $\vec{v}$:

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$$

e também o **módulo** de um vetor:

$$|\,\vec{u}\,|^2 = \vec{u}\cdot\vec{u} = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$$

Geometricamente, o módulo é a medida da diagonal de um paralelepípedo reto.

Exemplo:

Dados $\vec{u} = 3\vec{i} + \vec{j}$ e $v = 2\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$, obter:

1. $\vec{u} \,.\, \vec{v}$

$\vec{u} \,.\, \vec{v} = 3(2) + 1(2) + 0(-2) = 8$

2. $|\,\vec{u}\,|$

$|\,\vec{u}\,|^2 = (3)^2 + (1)^2 + (0)^2 = 10$

$|\,\vec{u}\,| = \sqrt{10}$

3. $|\,\vec{v}\,|$

$|\,\vec{v}\,|^2 = (2)^2 + (2)^2 + (-2)^2 = 12$

$|\,\vec{v}\,| = 2\sqrt{3}$

4. O ângulo θ entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

$\vec{u} \,.\, \vec{v} = |\,\vec{u}\,|\,|\,\vec{v}\,| \cos\theta$

substituindo os valores acima obtidos:

$8 = \sqrt{(10)}\,(2\sqrt{3}) \cos\theta$ ou

$\cos\theta = \dfrac{4}{\sqrt{30}}$ ou

$\theta = \text{arc cos}\dfrac{4}{\sqrt{30}}$, ou seja $\theta \cong 43°$

Exercícios

> "O mundo é um vasto templo dedicado à discórdia."
>
> *François M. Voltaire (1694-1778), escritor francês*

01. Calcular os módulos e o produto escalar dos vetores

$\vec{u} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ e $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j} + \sqrt{7}\,\vec{k}$

Resp.: $|\,\vec{u}\,| = 5$; $|\,\vec{v}\,| = 3$;

$\vec{u} \,.\, \vec{v} = -1$

02. Indicar quais vetores são unitários:

$\vec{u} = (1,\ 1,\ 1)$

$$\vec{v} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ 0,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$\vec{w} = (0,\ 0,\ 1)$

Resp.: $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são unitários.

03. Determinar m, sabendo-se ortogonais os vetores

$\vec{u} = 3\vec{i} + m\vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{v} = \vec{i} - \sqrt{2}\vec{j} - \vec{k}$

Resp.: $m = \sqrt{2}$

04. Sendo $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{v} = -\vec{i} + \vec{j}$, achar:

a) a medida do ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$;

Resp.: 150°

b) a medida da projeção do vetor $\vec{v}$ sobre o vetor $\vec{u}$.

Resp.: $\dfrac{-\sqrt{6}}{2}$ u.c.

01. Sabendo-se que $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são coplanares e $\vec{u} = 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{v} = \vec{j} + 3\vec{k}$ e $\vec{w} = 3\vec{j}$, exprimir $\vec{w}$ como combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Resp.: $\vec{w} = \dfrac{9}{7}\vec{u} + \dfrac{3}{7}\vec{v}$

02. Achar o ângulo θ entre os vetores $\vec{u} = (10, -5, 0)$ e $\vec{v} = (1, 2, 3)$.

Resp.: $\theta = \dfrac{\pi}{2}$

03. Provar que ABC é triângulo retângulo, sendo A = (3, –2, 8), B = (0, 0, 2) e C = (–3, –5, 10).

04. Demonstrar vetorialmente a fórmula da distância entre os pontos $P = (x_1, y_1, z_1)$ e $P = (x_2, y_2, z_2)$

Resp.: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

SUGESTÃO

$(P_1 - P_2) = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$

então $d = |(P_2 - P_1)|$

05. Dados $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{k}$ e $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j}$, calcular o vers $(2\vec{u} + \vec{v})$.

Resp.: $\frac{2}{3}\vec{i} - \frac{1}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k}$

06. Os vetores $\vec{u} = a\vec{i} + \vec{j}$ e $\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ formam um ângulo de 45°. Achar os valores de a.

Resp.: 1 e 7

07. Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos. Calcular o vetor $\vec{v}$, conhecendo-se $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$.

Resp.: $\vec{v} = \vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} + \frac{1}{2}\vec{k}$

08. São ortogonais os vetores $\vec{u} = (2, 4, 1)$ e $\vec{v} = (1, 0, -2)$?

Resp.: Sim

09. Dado o triângulo retângulo ABC com ângulo reto em B, determinar a medida da projeção do cateto $\overline{AB}$ sobre a hipotenusa $\overline{AC}$.

Dados A = (0, 0, 2), B = (3, –2, 8) e C = (–3, –5, 10)

Resp.: $\frac{7\sqrt{2}}{2}$

10. Seja o triângulo de vértices A = (0, 0, 0), B = (1, –2, 1) e C = (1, 1, –2). Pede-se o ângulo interno ao vértice A.

Resp.: 120º

11. Achar o(s) vetor(es) $\vec{v} = (x, y, z)$ tais que:

1) $|\vec{v}| = \sqrt{6}$

2) $\vec{v}$ é ortogonal a $\vec{u} = (3, -3, 0)$;

3) $\vec{v}$ é ortogonal a $\vec{w} = (0, 2, -1)$.

Resp.: $(\pm 1, \ \pm 1, \ \pm 2)$

12. Pede-se o vetor $\vec{u} = (x, y, z)$ sabendo-se que:

1) $\vec{u}$ é paralelo a $\vec{v} = (-1, 1, 2)$

2) $\vec{u} \cdot \vec{w} = 15$, onde $\vec{w} = (2, 1, 3)$.

Resp.: (–3, 3, 6)

13. Sendo $\vec{u} = (2a, a, 2a)$, determinar **a** para que $\vec{u}$ seja um versor.

Resp.: $a = \pm\frac{1}{3}$

14. Determinar **a** para que seja de 45° o ângulo entre os vetores $\vec{u} = (1, a, 0)$ e $\vec{j}$.

Resp.: $a = \pm 1$

15. Calcular o valor de **m** para que o vetor $\vec{u} + \vec{v}$ seja ortogonal ao vetor $\vec{w} - \vec{u}$, onde $\vec{u} = (2, 1, m)$, $\vec{v} = (m + 2, -5, 2)$ e $\vec{w} = (2m, 8, m)$.

Resp.: –6 e 3

16. Os pontos A = (2, 1, 2), B = (1, 2, z) e C = (–1, 0, –1) são vértices de um triângulo retângulo, com ângulo reto em B. Calcular z.

Resp.: –1 ou 2

SUGESTÃO

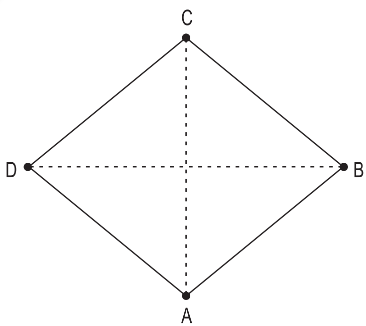
O produto interno dos catetos deve ser nulo.
Por exemplo: (B – A) · (C – B) = 0

Série B

"O amor não garante uma boa convivência."
De uma psicoterapeuta, na Rádio CBN

17. Provar que as diagonais de um losango são ortogonais entre si.

SUGESTÃO



Se as diagonais são ortogonais:
(C – A) · (B – D) = 0

Mas
(C – A) = (B – A) + (C – B) e
(B – D) = (A – D) + (B – A)

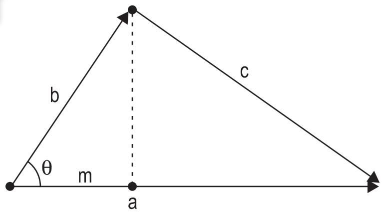
Substituindo:
[(B – A) + (C – B)] · [(A – D) + (B – A)] = 0

Aplicando a propriedade distributiva:
$| B – A |^2 – | A – D |^2 = 0$

donde | B – A | = | A – D |

18. Demonstrar que num triângulo retângulo qualquer cateto é média geométrica entre sua projeção sobre a hipotenusa e a hipotenusa inteira.

SUGESTÃO



Na figura:
$\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$

Multiplicando escalarmente por $\vec{b}$:

$\vec{a} \,.\, \vec{b} = \vec{b} \,.\, \vec{b} + \vec{b} \,.\, \vec{c}$

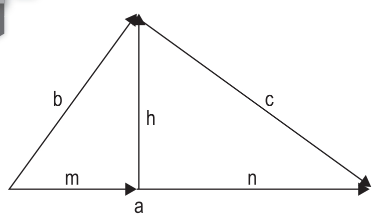
$|\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\theta = |\vec{b}|^2 + |\vec{b}|\,|\vec{c}| \cos 90°$

Porém $|\vec{b}| \cos\theta = m$

Então $|\vec{a}|\, m = |\vec{b}|^2 \Rightarrow$ $\vec{b}^2 = am$

19. Demonstrar que num triângulo retângulo a altura relativa à hipotenusa é média geométrica entre as projeções dos catetos sobre a hipotenusa.

SUGESTÃO



Na figura:
$\vec{b} = \vec{m} + \vec{h}$
$\vec{c} = \vec{n} - \vec{h}$

Multiplicando escalarmente, membro a membro:

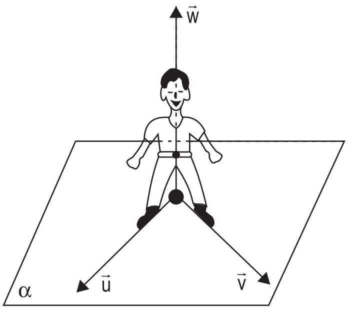
$$\vec{b} \cdot \vec{c} = (\vec{m} + \vec{h}) \cdot (\vec{n} - \vec{h})$$
$$0 = \vec{m} \cdot \vec{n} - \underbrace{\vec{m} \cdot \vec{h}}_{0} + \underbrace{\vec{n} \cdot \vec{h}}_{0} - \vec{h} \cdot \vec{h}$$

Logo: $h^2 = mn$

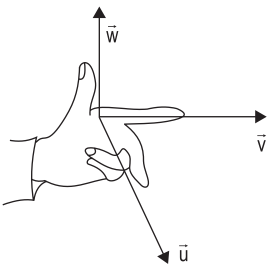
17. MULTIPLICAÇÃO VETORIAL OU EXTERNA

SÍMBOLO: $\vec{u} \times \vec{v}$

TRIEDRO POSITIVO



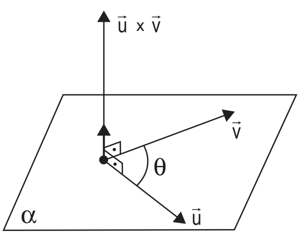
Os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, nesta ordem, formam um triedro positivo se um observador postado em $\vec{w}$ e de frente para $\vec{u}$ e $\vec{v}$ tem à sua direita o vetor $\vec{u}$ e à sua esquerda o vetor $\vec{v}$.



Ao repto de convencionar o triedro positivo, a Física utiliza a regra da mão esquerda: dispõe-se o dedo médio na direção e sentido de $\vec{u}$; o indicador na direção e sentido de $\vec{v}$; o polegar indicará a direção e o sentido de $\vec{w}$.

DEFINIÇÃO

O produto vetorial ou externo de dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não paralelos entre si é um terceiro vetor com as seguintes características quanto:



1) à direção: o vetor $\vec{u} \times \vec{v}$ é perpendicular aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

2) ao sentido: os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{u} \times \vec{v}$, nesta ordem, formam um triedro positivo.

3) ao módulo:

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \operatorname{sen} \theta$$

onde θ é a medida do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

OBSERVAÇÃO

1) Como operação autônoma, a multiplicação vetorial foi criada por J. Gibbs.

2) Merecem cuidados:

$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}| \cos \theta$ (verdadeiro)

$\vec{u} \times \vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}| \operatorname{sen} \theta$ (falso)

Nulidade do produto externo

$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$, se:

I) um dos vetores for nulo;

II) os dois vetores forem paralelos, pois o sen $\theta = 0$ quando $\theta = 0°$ ou $\theta = 180°$.

OBSERVAÇÃO

Enfatizemos que para $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$:

a) o produto interno é nulo para $\vec{u}$ e $\vec{v}$ ortogonais;

b) o produto externo é nulo para $\vec{u}$ e $\vec{v}$ paralelos.

Face o exposto, não é factível o cancelamento do fator comum a $\vec{u} \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{v}$ e a $\vec{u} \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$.

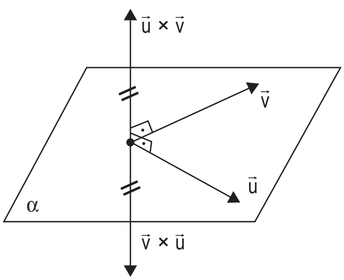
Propriedades

I) **Anti-comutativa:**

$\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$

A justificativa é apresentada pela figura:

onde $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{v} \times \vec{u}|$



II) **Associativa:**

$k(\vec{u} \times \vec{v}) = (k\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (k\vec{v})$

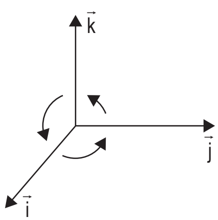
III) Distributiva em relação à adição de vetores:

$\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$

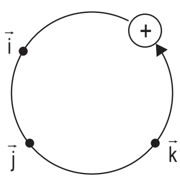
OBSERVAÇÃO

A demonstração fica postergada. Está condicionada à apresentação das propriedades do produto misto.

MULTIPLICAÇÃO EXTERNA DOS VERSORES $\vec{i}$, $\vec{j}$ E $\vec{k}$



Em particular os versores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$, nesta ordem, representam um triedro positivo.



Na prática, utilize a "circunferência" para efetuar o produto externo de dois desses versores, cujo resultado é o versor **faltante**, de sinal positivo se no sentido anti-horário. Negativo, se no sentido horário.

Exemplos:

$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$
$\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$
$\vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$
$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$

Casos particulares: $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$

Expressão cartesiana do produto vetorial

Todo o capítulo de vetores apresenta uma importância assaz grande para a sua vida acadêmica e quiçá profissional. Em especial, o assunto em pauta.

Dados

$\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ e $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$

calcular $\vec{u} \times \vec{v}$ na base ortogonal $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

$$
\begin{aligned}
\vec{u} \times \vec{v} &= (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) \times (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) \\
&= x_1x_2 \underbrace{\vec{i} \times \vec{i}}_{\vec{0}} + x_1y_2 \underbrace{\vec{i} \times \vec{j}}_{\vec{k}} + x_1z_2 \underbrace{\vec{i} \times \vec{k}}_{-\vec{j}} + \\
&+ x_2y_1 \underbrace{\vec{j} \times \vec{i}}_{-\vec{k}} + y_1y_2 \underbrace{\vec{j} \times \vec{j}}_{\vec{0}} + y_1z_2 \underbrace{\vec{j} \times \vec{k}}_{\vec{i}} + \\
&+ x_2z_1 \underbrace{\vec{k} \times \vec{i}}_{\vec{j}} + y_2z_1 \underbrace{\vec{k} \times \vec{j}}_{-\vec{i}} + z_1z_2 \underbrace{\vec{k} \times \vec{k}}_{\vec{0}}
\end{aligned}
$$

Fatorando em relação aos versores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$:

$\vec{u} \times \vec{v} = (y_1z_2 - y_2z_1)\vec{i} + (x_2z_1 - x_1z_2)\vec{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\vec{k}$

Tal expressão pode ser escrita numa forma mais mnemônica, através do "determinante":

$$
\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}
$$

Exemplo:

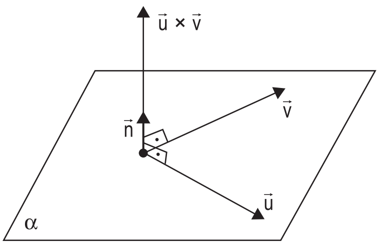
Sendo $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$, calcular:

1) $\vec{u} \times \vec{v}$

Resolução:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k}$$

2) o vetor unitário ortogonal ao vetor $\vec{u}$ e a $\vec{v}$.



Resolução:

$$\vec{n} = \text{vers } (\vec{u} \times \vec{v}) = \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$$

Onde:

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{(1)^2 + (5)^2 + (3)^2} = \sqrt{35}$$

Então:

$$\vec{n} = \frac{\vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k}}{\sqrt{35}} = \frac{1}{\sqrt{35}}\vec{i} + \frac{5}{\sqrt{35}}\vec{j} + \frac{3}{\sqrt{35}}\vec{k}$$

Exercícios

> Se o mundo é ruim, talvez não seja pela quantidade de maus, mas pela mediocridade dos bons.

01. Efetuar:

a) $(\vec{i} \times \vec{k}) \times (\vec{i} \times \vec{j}) =$

b) $(\vec{i} \times \vec{k}) \times (\vec{k} \times \vec{j}) \times (\vec{j} \times \vec{j}) =$

Resp.: a) $-\vec{j}$; e b) $\vec{0}$

01. Conhecidos $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, pede-se:

a) $\vec{u} \times \vec{v}$

Resp.: $7\vec{i} - 3\vec{j} - 5\vec{k}$

b) $\vec{v} \times \vec{u}$

Resp.: $-7\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$

c) $|\vec{u} \times \vec{v}|$

Resp.: $\sqrt{83}$

d) $|\vec{v} \times \vec{u}|$

Resp.: $\sqrt{83}$

01. Determinar o vetor unitário $\vec{n}$, ortogonal aos vetores $\vec{u} = (2, 3, -1)$ e $\vec{v} = (1, 1, 2)$.

Resp.: $\vec{n} = \left(\frac{7}{5\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{5\sqrt{3}}\right)$

02. Achar o vetor $\vec{w} = (x, y, z)$, tal que $\vec{w} \cdot (1, 0, 2) = 3$ e $\vec{w} \times (1, 0, -1) = (-2, 3, -2)$.

Resp.: $\vec{w} = (3, 2, 0)$

03. Calcular o $|\vec{u}|$, conhecendo-se $|\vec{u} \times \vec{v}| = 4\sqrt{2}$, $|\vec{v}| = 2$ e $\widehat{\vec{u}\vec{v}} = 45°$.

Resp.: 4

04. O vetor $\vec{w}$ tem módulo 7, forma um ângulo agudo com o eixo das abscissas e é ortogonal aos vetores $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j}$ e $\vec{v} = \vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$.
Pede-se $\vec{w}$.

Resp.: $\vec{w} = 6\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$

05. Determinar um vetor concomitantemente perpendicular aos vetores $\vec{u} + \vec{v}$ e $2\vec{v} - \vec{u}$, sendo $\vec{u} = \vec{i} + j$ e $\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{k}$.

Resp.: $-3\vec{i} + 3\vec{j} - 6\vec{k}$

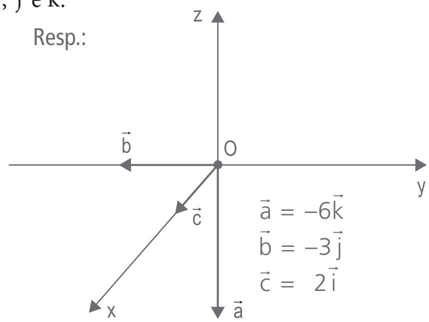
06. Representar no triedro positivo $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$:

a) $\vec{a} = (2\vec{j}) \times (3\vec{i})$

b) $\vec{b} = \vec{i} \times (3\vec{k})$

c) $\vec{c} = (2\vec{j}) \times \vec{k}$

Resp.:



$\vec{a} = -6\vec{k}$
$\vec{b} = -3\vec{j}$
$\vec{c} = 2\vec{i}$

07. Calcular o vetor de módulo 18 e simultaneamente ortogonal a $\vec{u} = (2, -1, 0)$ e a $\vec{v} = (2, -4, 3)$.

Resp.: (–6, –12, –12) ou (6, 12, 12)

08. Sendo $\vec{v} = (1, -1, 1)$, calcular o(s) vetor(es) $\vec{u} = (x, y, z)$ que satisfaça(m) as três condições seguintes:

1) $\vec{u}$ seja ortogonal ao eixo x;

2) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$;

3) $|\vec{v} \times \vec{u}| = 3\sqrt{6}$

Resp.: $\vec{u} = (0, 3, 3)$ ou $\vec{u} = (0, -3, -3)$

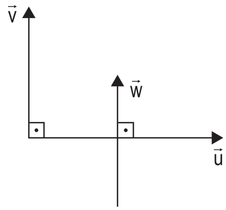
SUGESTÃO

Se $\vec{u}$ é ortogonal ao eixo x $\Rightarrow \vec{u} = (0, y, z)$.

01. Sendo $|\vec{u}| = 5$, $|\vec{v}| = 2$ e $\vec{u} \cdot \vec{v} = 8$, calcular $|\vec{u} \times \vec{v}|$.

Resp.: 6

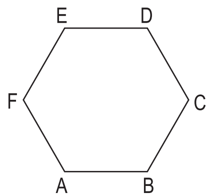
02. Na figura abaixo, obter:



$\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w} + |\vec{v} \times \vec{w}|$

Resp.: $|\vec{v}|\,|\vec{w}|$

03. Num hexágono regular, a medida de cada lado vale 2.



Calcular $|(A - B) \times (C - B)|$.

Resp.: $2\sqrt{3}$

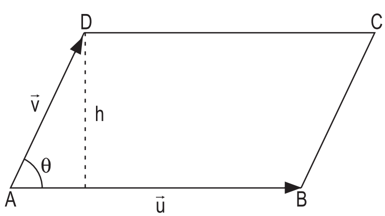
04. Seja α um plano determinado pelos vetores $\vec{u} = (2, -1, 0)$ e $\vec{v} = (0, 1, -1)$. Determinar o conjunto de vetores ortogonais a α.

Resp.: k (1, 2, 2)

18. ÁREA DE UM PARALELOGRAMO E DE UM TRIÂNGULO

Tratar-se-á da interpretação geométrica do produto externo de dois vetores.

ÁREA DE UM PARALELOGRAMO



Seja um paralelogramo construído sobre $\vec{u} = (B - A)$ e $\vec{v} = (D - A)$ e h a sua altura.

Da Geometria Plana:

$S_{ABCD} = (AB)h$

Mas $AB = |\vec{u}|$

$h = |\vec{v}| \operatorname{sen} \theta$

Substituindo: $S_{ABCD} = |\vec{u}|\,|\vec{v}| \operatorname{sen} \theta$ ou

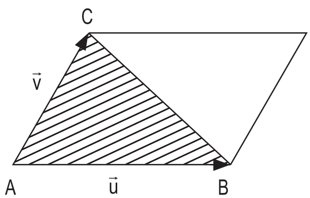
$$S_{ABCD} = |\vec{u} \times \vec{v}|$$

Ou seja: geometricamente o módulo do produto externo de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ coincide com a área do paralelogramo construído sobre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Por diferença de pontos:

$$S_{ABCD} = |(B - A) \times (D - A)|$$

Área de um triângulo



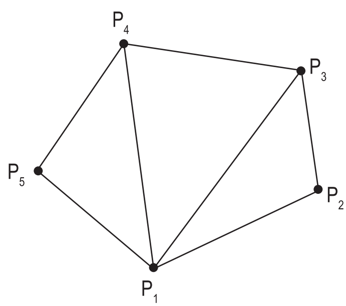
Face o exposto, depreende-se facilmente que a área do triângulo ABC é obtida por:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}|\vec{u} \times \vec{v}|$$

Por diferença de pontos:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}|(B - A)\times(C - A)|$$

Área de polígono



Conhecidos os vértices de um polígono, podemos decompô-lo em triângulos.

Exemplificando: seja um pentágono de vértices

$P_i = (x_i, y_i, z_i)$ com

$i = 1, 2, 3, 4, 5$

$$S = S_{P_1P_2P_3} + S_{P_1P_3P_4} + S_{P_1P_4P_5}$$

Exercícios

"Não se mede a eficiência de um administrador se problemas existem, mas avaliando se esses problemas ainda são os mesmos."

John Foster Dulles (1888-1959), secretário de Estado norte-americano

01. Sendo $|\vec{u}| = 4$, $|\vec{v}| = 3$ e $\widehat{\vec{u}\vec{v}} = 150°$, calcular:

a) a área do triângulo construído sobre $\vec{u}$ e $\vec{v}$;

b) a área do paralelogramo construído sobre $\vec{u} + \vec{v}$ e $2\vec{u} - 3\vec{v}$.

Resp.: a) 3 u.a.; b) 30 u.a.

01. Pede-se a área o paralelogramo construído sobre $\vec{u} + 2\vec{v}$ e $\vec{u} - \vec{v}$, sendo $|\vec{u}| = 4$, $|\vec{v}| = 3$ e $\widehat{\vec{u}\vec{v}} = 120°$.

Resp.: $18\sqrt{3}$ u.a.

02. Provar que a área do paralelogramo construído sobre $\vec{a} + \vec{b}$ e $\vec{a} - \vec{b}$ é o dobro da área do paralelogramo construído sobre $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

SUGESTÃO

Área do paralelogramo sobre $\vec{a} + \vec{b}$ e $\vec{a} - \vec{b}$

$S = |(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})|$

Aplicando a propriedade distributiva:

$S = 2|\vec{b} \times \vec{a}|$ (cdq)

03. Calcular a área do triângulo construído sobre $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{v} = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

Resp.: $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ u.a.

04. A área de um paralelogramo construído sobre $\vec{u} = (1, 1, a)$ e $\vec{v} = (-1, 1, 0)$ é igual a $\sqrt{22}$. Pede-se o valor de a.

Resp.: $a = \pm 3$

05. Determinar a área do paralelogramo construído sobre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ cujas diagonais são $\vec{u} + \vec{v} = (0, 3, 5)$ e $\vec{u} - \vec{v} = (2, 1, 1)$.

Resp.: $\sqrt{35}$ u.a.

SUGESTÃO

Resolva o sistema:

$\vec{u} + \vec{v} = (0,\ 3,\ 5)$
$\vec{u} - \vec{v} = (2,\ 1,\ 1)$ obtendo $\vec{u}$ e $\vec{v}$

06. No triângulo de vértices
A = (0, 0, 2), B = (3, –2, 8) e C = (–3, –5, 10), calcular:

a) a medida dos lados a, b, c;

Resp.: $7;\ 7\sqrt{2};\ 7$

b) a medida dos ângulos $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$;

Resp.: 45°; 90°; 45°

c) a área do triângulo.

Resp.: $\frac{49}{2}$ u.a.

01. Os pontos (3, 1, 1), (1, –2, 3), (2, –1, 0) são os pontos médios dos lados do triângulo ABC. Qual a área do triângulo ABC?

Resp.: $2\sqrt{66}$ u.a.

02. Calcular a altura relativa ao vértice B do triângulo de vértices A = (2, 4, 0), B = (0, 2, 4) e C = (6, 0, 2).

Resp.: $h_B = \frac{10\sqrt{2}}{3}$

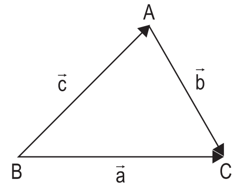
SUGESTÃO

$$S_{ABC} = \frac{(AC)h_B}{2}$$

03. Demonstrar a lei dos senos.

SUGESTÃO

$2S_{ABC} = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a} \times \vec{c}| = |\vec{b} \times \vec{c}|$



ou

$|\vec{a}||\vec{b}|\,\text{sen } C = |\vec{a}||\vec{c}|\,\text{sen } B = |\vec{b}||\vec{c}|\,\text{sen } A \div |\vec{a}||\vec{b}||\vec{c}|$

$$\frac{\text{sen } C}{|\vec{c}|} = \frac{\text{sen } B}{|\vec{b}|} = \frac{\text{sen } A}{|\vec{a}|} \quad \text{ou}$$

$$\frac{\text{sen } A}{a} = \frac{\text{sen } B}{b} = \frac{\text{sen } C}{c} \quad \text{(cqd)}$$

04. Achar a área do quadrilátero A = (1, 4, 0), B = (5, –1, 0), C = (0, –1, 0) e D = (–4, 2, 0).

Resp.: 24 u.a.

19. MULTIPLICAÇÃO MISTA

Definição

Dados os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, o produto misto desses três vetores é o **escalar** representado por $\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w}$.

Quanto à ordem das operações, realiza-se inicialmente o produto externo e em seguida o produto interno.

Nulidade do produto misto

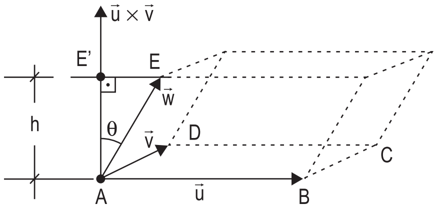
$\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w} = 0$, se:

I) pelo menos um dos vetores for nulo;

II) $\vec{u}$ for paralelo a $\vec{v}$ (pois $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$);

III) os três vetores forem coplanares.

Interpretação geométrica do produto misto



Os três vetores não coplanares $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ representam arestas de um paralelepípedo.

Sabe-se da Geometria Espacial que o volume do paralelepípedo (V_p) é o produto da área da base pela altura:

$$V_p = (S_{ABCD})h$$

Mas

$$S_{ABCD} = |\vec{u} \times \vec{v}|$$

$h = |\vec{w}| \cos\theta$ (do triângulo retângulo AE'E)

Substituindo:

$$V_p = |\vec{u} \times \vec{v}|\,|\vec{w}| \cos\theta$$

Como θ é o ângulo formado entre o vetor $\vec{u} \times \vec{v}$ e o vetor $\vec{w}$, tem-se acima a fórmula do produto interno entre os vetores $\vec{u} \times \vec{v}$ e $\vec{w}$.

$$V_p = \vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w}$$

Geometricamente, o produto misto $\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w}$ representa o volume de um paralelepípedo de arestas $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

Convenção de sinal

O volume do paralelepípedo pode estar afetado pelo sinal positivo ou negativo, conforme o ângulo θ seja agudo ou obtuso respectivamente.

Justificativa:

I) Se $0° < \theta < 90° \Rightarrow \cos\theta = \oplus \Rightarrow V_p = \oplus$

II) Se $90° < \theta < 180° \Rightarrow \cos\theta = \ominus \Rightarrow V_p = \ominus$

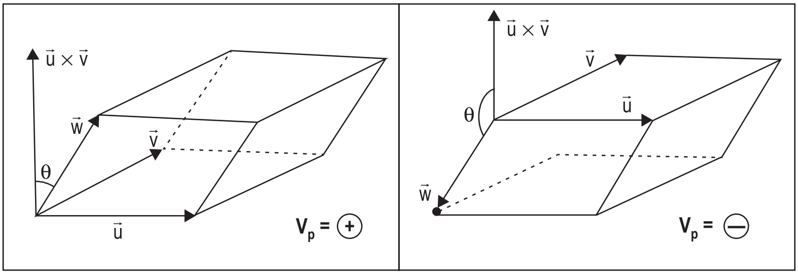
OBSERVAÇÃO

Em particular se:

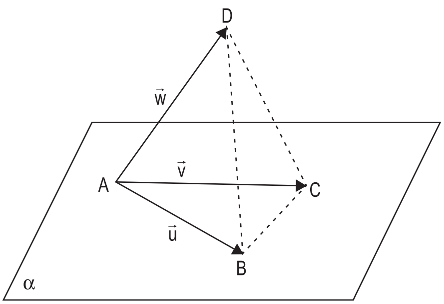
a) $\theta = 0° \Rightarrow V_p = \oplus$

b) $\theta = 180° \Rightarrow V_p = \ominus$

c) $\theta = 90° \Rightarrow V_p = 0$



Volume do tetraedro



O volume do tetraedro (V_t) equivale a $\frac{1}{6}$ do volume de um paralelepípedo (V_p) construído sobre os mesmos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

$$V_t = \frac{1}{6} V_p$$

Então:

$$V_t = \frac{1}{6} \vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w}$$

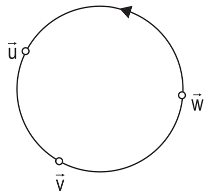
Por diferença de pontos:

$$V_t = \frac{1}{6} (B - A) \times (C - A) \cdot (D - A)$$

Propriedades do produto misto:

I) **Cíclica:** a permuta circular ou cíclica dos fatores não altera o produto misto. Por outro lado, o produto misto troca de sinal quando se permuta não ciclicamente seus fatores.

Exemplos:



$$\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{v} \times \vec{w} \cdot \vec{u}$$
$$= \vec{w} \times \vec{u} \cdot \vec{v}$$
$$= -\vec{v} \times \vec{u} \cdot \vec{w}$$
$$= -\vec{u} \times \vec{w} \cdot \vec{v}$$

I) **Permuta dos símbolos:** não se altera o produto misto quando se permuta os símbolos da multiplicação interna e externa.

Exemplo:
$\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w}$

Expressão cartesiana do produto misto

Consideremos os vetores por suas expressões cartesianas:
$\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$
$\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$
$\vec{w} = x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k}$

Procuramos a expressão cartesiana de $\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w}$
1.º passo:
$$\vec{u} \times \vec{v} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) \times (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k})$$
$$= (y_1z_2 - y_2z_1)\vec{i} + (x_2z_1 - x_1z_2)\vec{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\vec{k}$$

2.º passo:
Multiplicamos escalarmente esta última expressão pelo vetor $\vec{w}$.
$$\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w} = x_3(y_1z_2 - y_2z_1) + y_3(x_2z_1 - x_1z_2) + z_3(x_1y_2 - x_2y_1)$$

A memorização de tal expressão apresenta uma certa dificuldade. Por isso, faz-se mister, sob o aspecto mnemônico, que se empregue um determinante, dada a coincidência de resultados:

$$\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_1 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

(expressão cartesiana do produto misto)

Exercícios

"A corrupção não é uma invenção brasileira, mas a impunidade é uma coisa muito nossa."

Jô Soares (n. 1938), na Folha de S. Paulo)

01. Dados os vetores $\vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}$, $\vec{v} = -3\vec{i} - 5\vec{j} + 8\vec{k}$ e $\vec{w} = \vec{i} + \vec{k}$, calcular:

a) a área do paralelogramo construído sobre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

b) o volume do paralelepípedo construído sobre $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

c) a altura (em valor absoluto) do paralelepípedo.

d) o volume do tetraedro construído sobre $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

Resp.: a) 49; b) – 7; c) $\frac{1}{7}$; d) $-\frac{7}{6}$

01. Calcular o volume do tetraedro de arestas $\vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{j} - 6\vec{k}$, $\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{j}$ e $\vec{w} = \vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$.

Resp.: $-\frac{19}{3}$

02. Determinar x para que o ponto A pertença ao plano BCD.
Dados: A = (4, 5, x), B = (–4, 4, 4), C = (0, –1, –1), D = (3, 9, 4).

Resp.: x = 1

SUGESTÃO

Faça $V_t = \frac{1}{6}(B - A)x(C - A) \cdot (D - A) = 0$

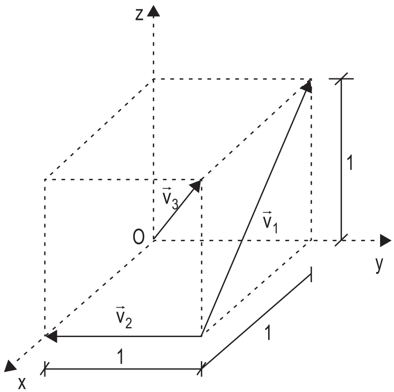
03. Os vetores $\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ e $3\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$ são coplanares?

Resp.: Sim.

04. Calcular o volume do paralelepípedo construído sobre $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

Resp.: 1 u.v.

05. Na figura abaixo estão representados os vetores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$. Achar o produto misto $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \cdot (\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2) \times (\vec{v}_3 + 2\vec{v}_1)$.

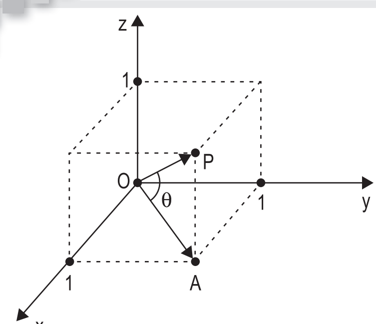


Resp.: –6

06. Calcular o ângulo da diagonal do cubo com a diagonal de uma face de mesma origem.

Resp.: $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ ou $\theta \cong 35°$

SUGESTÃO



Sejam $(A - O) = \vec{i} + \vec{j}$ e $(P - O) = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ os vetores que dão as direções das diagonais. Faça o produto interno.

07. Determinar o ângulo agudo formado por duas diagonais de um cubo.

Resp.: $\cos\theta = \frac{1}{3}$ ou $\theta \cong 70°$

Série B

08. Demonstrar a propriedade distributiva do produto externo:
$\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$

20. DUPLA MULTIPLICAÇÃO VETORIAL

Definição

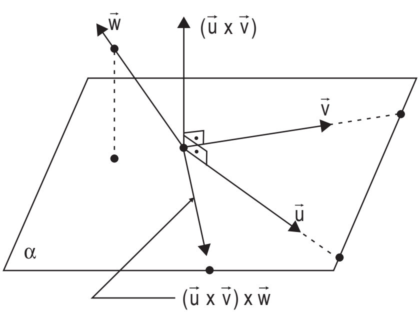
Dados os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, chama-se duplo produto vetorial ou duplo produto externo ao vetor $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$ ou ao vetor $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$. Esses dois vetores na maioria esmagadora das vezes são distintos, não se verificando a propriedade associativa. É imprescindível, portanto, o uso dos parênteses.

OBSERVAÇÃO

Relembrando:

$\vec{u} \cdot \vec{v}$ resulta um escalar	$\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w}$ resulta um escalar
$\vec{u} \times \vec{v}$ resulta um vetor	$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$ resulta um vetor

Representação do duplo produto externo



Sem muita dificuldade podemos visualizar o vetor $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$. Na figura representa-se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ coplanarmente a α; $\vec{w}$ não pertence ao plano α; $(\vec{u} \times \vec{v})$ é um vetor ortogonal a α; efetuando-se o produto externo entre $(\vec{u} \times \vec{v})$ e $\vec{w}$ tem-se um vetor ortogonal a eles e em decorrência coplanar a α. *Ipso facto*, os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$ são coplanares. Donde se infere que o vetor $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$ pode ser expresso como combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Assim: $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = k_1\vec{u} + k_2\vec{v}$

Exercícios

"Sobre todas as coisas há três pontos de vista:
o teu, o meu e o correto."

(Provérbio chinês)

01. Sejam os vetores $\vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{j} - 6\vec{k}$, $\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{j}$ e $\vec{w} = \vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$, achar:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$

Resp.: 8

b) $|\vec{u} \times \vec{v}|$

Resp.: $\sqrt{181}$

c) $\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w}$

Resp.: -38

d) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$

Resp.: $-51\vec{i} + 25\vec{j} - 6\vec{k}$

e) $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$

Resp.: $-62\vec{i} + 3\vec{j} - 32\vec{k}$

01. Dados os vetores $\vec{u} = (2, 0, 0)$, $\vec{v} = (1, 1, 1)$ e $\vec{w} = (3, 2, -1)$ calcular:

a) $|(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}|$

Resp.: $2\sqrt{19}$

b) $(\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u}$

Resp.: $-2\vec{i} + 6\vec{j} + 6\vec{k}$

c) o vetor $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$ como combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Resp.: $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = -4\vec{u} + 6\vec{v}$

SUGESTÃO

Quanto ao item "c" faça $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = k_1\vec{u} + k_2\vec{v}$

01. Considerando os vetores $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (-1, 1, 2)$, $\vec{a} = (2, -4, 3)$ e $\vec{b} = (2, -1, 0)$, calcular:

a) $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$

Resp.: -9

b) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times (\vec{a} \times \vec{b})$

Resp.: $(-48, 3, 21)$

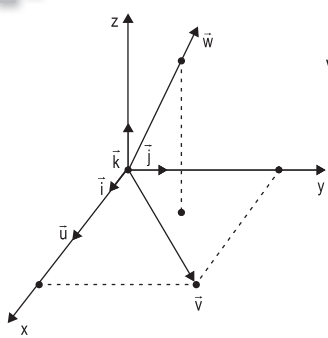
Série B

01. Demonstrar os teoremas:

a) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u}$

b) $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$

SUGESTÃO



Posicionando-se os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, conforme a figura:

$\vec{u} = x_1\vec{i}$

$\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$

$\vec{w} = x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k}$

Símbolos e notações matemáticas

Apropriadamente, já se definiu a Matemática como a "rainha e a serva de todas as ciências". E os apanágios de sua majestade são o rigor, a lógica, a harmonia e sua linguagem precisa, universal e sincopada.

Sabemos que os gregos antigos promoveram um grande desenvolvimento à Geometria Plana e Espacial, mas não dispunham de uma notação algébrica ou de simbologia adequadas.

Até o século XVI, toda a expressão matemática se fazia de uma forma excessivamente "verbal ou retórica". Por exemplo, em 1591, Viète para representar a equação quadrática $5A^2 + 9A - 5 = 0$, escrevia em bom latim: *5 in A quad. et 9 in A planu minus 5 aequatur 0*. (5 em A quadrado e 9 em A plano menos 5 é igual a zero).

Além da prolixidade de comunicação entre os matemáticos, havia outras dificuldades, pois utilizavam-se notações diferentes para indicar as mesmas coisas.

O maior responsável por uma notação matemática mais consistente e utilizada até hoje foi Leonhard Euler (1707-1783).

Recordemos as principais: **f(x)** (para indicar função de x); $\sum$ (somatória, provém da letra grega sigma, que corresponde ao nosso S); **i** (unidade imaginária, igual a $\sqrt{-1}$); **e** (base do logaritmo neperiano e igual a 2,7182...); **log x** (para indicar o logaritmo decimal de x); as letras minúsculas **a**, **b**, **c** para indicarem os lados de um triângulo e as letras maiúsculas **A**, **B**, **C** para os ângulos opostos. A letra π = 3,1415... que havia sido utilizada por William Jones em 1706, teve o uso consagrado por Euler.

Este nasceu em Basileia, Suíça, e recebeu educação bastante eclética: Matemática, Medicina, Teologia, Física, Astronomia e Línguas Ocidentais e Orientais. Foi aluno de Jean Bernoulli e amigo de seus filhos Nicolaus e Daniel.

Extremamente profícuo, insuperável em produção matemática, Euler escrevia uma média de 800 páginas por ano e publicou mais de 500 livros e artigos. Em plena atividade intelectual, morreu aos 76 anos, sendo que os últimos 17 anos passou em total cegueira (consequência de catarata). Mesmo assim continuou ditando aos seus filhos (eram 13).

Euler se ocupou com praticamente todos os ramos então conhecidos da Matemática, a ponto de merecer do francês François Arago o seguinte comentário: "Euler calculava sem qualquer esforço aparente como os homens respiram e as águias se sustentam no ar."

Em 1748, publica sua principal obra com o título latino: **Introductio in Analysis infinitorum** (Introdução à Análise Infinita), considerada um dos marcos mais importantes da Análise como disciplina sistematizada. Destarte, Euler recebeu a alcunha de "Análise Encarnada".

A implementação dos símbolos mais adequados foi acontecendo naturalmente ao longo das décadas ou dos séculos, sob a égide da praticidade e do pragmatismo. É evidente, porém, que pouco se pode afirmar com precisão nesta evolução. Alguns exemplos:

SÍMBOLO DE +

O primeiro a empregar o símbolo de + para a adição em expressões aritméticas e algébricas foi o holandês V. Hoecke em 1514. Há historiadores, porém, que creditam tal mérito a Stifel (1486-1567).

Uma explicação razoável é que até então, a adição de dois números, por exemplo 3 + 2, era representada por 3 **et** 2. Com o passar dos anos, a conjunção latina **et** (que significa e) foi sincopada para "**t**", donde se originou o sinal de +.

SÍMBOLO DE –

Pode ter sido fruto da evolução abaixo exposta, conforme se observa nos escritos dos matemáticos italianos da Renascença:

1.º) 5 minus 2 = 3 (*minus* em latin significa menos)

2.º) 5 $\overline{m}$ 2 = 3 ($\overline{m}$ é a abreviatura de *minus*).

3.º) 5 – 2 = 3 (sincopou-se o m da notação $\overline{m}$)

SÍMBOLOS DA MULTIPLICAÇÃO

O símbolo de **x** em a x b para indicar a multiplicação foi proposto pelo inglês William Oughthed (1574-1660). É provável que seja originário de uma alteração do símbolo de +. O ponto em a . b foi introduzido por Leibniz (1646-1716).

SÍMBOLOS DA DIVISÃO

Fibonacci (séc. XII) emprega a notação: $\frac{a}{b}$ ou a/b, já conhecidas dos árabes.

A notação a : b é devida a Leibniz em 1648. Já o inglês J. H. Rahn (1622-1676) emprega a notação a ÷ b.

SÍMBOLO π

É a inicial da palavra grega $\pi\varepsilon\rho\iota\varphi\varepsilon\rho\varepsilon\iota\alpha$, que significa circunferência. Sabemos que $\pi = 3{,}1415926535...$ é um número irracional e é a razão entre o comprimento da circunferência pelo seu diâmetro.

O aparecimento do símbolo π só aconteceu em 1706, e deve-se a Willian Jones, um amigo de Newton. No entanto, a consagração do uso do π deve-se ao matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783).

Em 1873, como muito se discutia sobre a irracionalidade do π , o inglês W. Shanks calculou-o com 707 casas decimais. Os cálculos eram laboriosos e feitos manualmente, e Shanks levou cerca de 5 anos para efetuá-los.

SÍMBOLO DE $\sqrt{}$ (RAIZ)

Apareceu pela primeira vez na obra **Die Coss** (1525), do matemático alemão C. Rudolff. Este sugeria o símbolo por sua semelhança com a primeira letra da palavra latina **radix** (raiz).

SÍMBOLO DE = (IGUALDADE)

Tudo indica que o sinal de igualdade (=) foi introduzido por Robert Recorde (~1557), pois nada é *moare equalle a paire de paralleles* (nada é mais igual que um par de retas paralelas).

SÍMBOLOS DE > OU <

O inglês Thomas Harriot (1560-1621) foi o introdutor dos símbolos de > ou < para indicar maior ou menor, respectivamente. No entanto, os símbolos ≥ ou ≤ surgiram mais tarde, em 1734, com o francês Pierre Bouguer.

ALGARISMOS INDO-ARÁBICOS

A palavra algarismo oriunda-se provavelmente do nome de um dos maiores algebristas árabes: **Al-Khowarismi**. Este escreveu o livro que recebeu o título latino: **De numero hindorum** (sobre os números dos hindus).

Esta obra apresenta a morfologia de números muito próxima dos símbolos: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Tais símbolos haviam sido criados pelos hindus, mas dado ao grande sucesso da obra em toda a Espanha, ficaram conhecidos como algarismos arábicos.

O monge e matemático francês Gerbert d'Aurillac tomou conhecimento dos algarismos indo-arábicos em Barcelona no ano de 980. No ano de 999, Gerbert foi eleito Papa (com nome de Silvestre II) e promoveu a divulgação de tais algarismos.

O zero aparece pela primeira vez num manuscrito muçulmano do ano de 873. Pecando por entusiasmo e exagero, um matemático afirmou: "o zero é a maior invenção da Matemática". Ou seria o maior algoz do aluno!?

ALGARISMOS ROMANOS

Estes por sua vez tiveram influência dos etruscos. Pelos manuscritos da época, conclui-se que os algarismos romanos se consolidaram pelo ano 30 d.C.

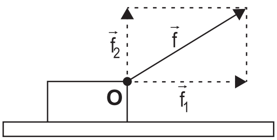
O símbolo I (que representa o nº 1) é uma das formas mais primitivas de se representar algo e tem origem incerta. Já o X (que representa o nº 10) decorre da palavra latina **decussatio**, que significa cruzamento em forma de X. O número 100, identificado pela letra C em algarismo romano, provém da inicial latina **centum** (cem). O algarismo romano M decorre da palavra latina **mille** (que significa 1.000).

(Do autor)

CAPÍTULO

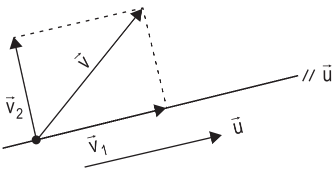
6 VETORES: APLICAÇÕES GEOMÉTRICAS CLÁSSICAS

1. PROJEÇÃO DE UM VETOR SOBRE UM OUTRO VETOR



Um assunto útil à Física: $\vec{f}$ representa uma força aplicada a um bloco. Nosso escopo é decompor $\vec{f}$ sobre outro vetor ou sobre os eixos cartesianos x e y.

Determinar o vetor $\vec{v}_1$, projeção do vetor $\vec{v}$ sobre o vetor $\vec{u} \neq \vec{0}$.



Dedução:

Sendo $\vec{v}_1$ paralelo a $\vec{u}$:

$\vec{v}_1 = k\vec{u}$ ①

Mas $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ ②

Substituindo ① em ②:

$\vec{v} = k\vec{u} + \vec{v}_2$

Multiplicando escalarmente por $\vec{u}$:

$\vec{u} \cdot \vec{v} = k\vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \,.\, \vec{v}_2$ ou

$\vec{u} \cdot \vec{v} = k|\vec{u}|^2 + 0 \Rightarrow k = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|^2}$ ③

Substituindo ③ em ①:

$$\vec{v}_1 = \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|^2}\right)\vec{u}$$

Ou simbolicamente:

$$\text{vetor proj}_{\vec{u}}\vec{v} = \frac{(\vec{u} \cdot \vec{v})}{|\vec{u}|^2}\vec{u}$$

Fórmula que fornece o **vetor projeção** de $\vec{v}$ na direção de $\vec{u}$ (ou sobre $\vec{u}$).

OBSERVAÇÃO

1) Obtido $\vec{v}_1$, na necessidade de calcular-se $\vec{v}_2$:
$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v} \Rightarrow \vec{v}_2 = \vec{v} - \vec{v}_1$
onde $\vec{v}_2$ representa a projeção do vetor $\vec{v}$ na direção ortogonal a $\vec{u}$.

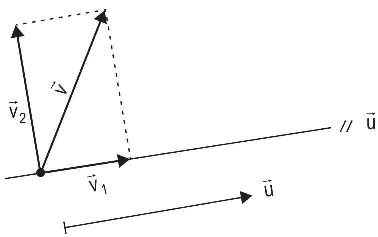
2) Reiteramos o exposto na interpretação geométrica do produto interno que a **medida algébrica** do vetor projeção de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ é obtida por:

$$\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|}$$

Exemplo

Dados os vetores $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j}$ e $\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, calcular:

1) O vetor projeção de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$.



Fórmula:

$$\vec{v}_1 = \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|^2}\right)\vec{u}$$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = (1)(2) + (-1)(-1) + 0(2) = 3$

$|\vec{u}|^2 = (1)^2 + (-1)^2 + (0)^2 = 2$

Substituindo na fórmula: $\vec{v}_1 = \left(\frac{3}{2}\right)(1, \ -1, \ 0)$

Resp.: $\vec{v}_1 = \left(\frac{3}{2}, \frac{-3}{2}, 0\right)$

2) $\vec{v}_2$: o vetor projeção de $\vec{v}$ sobre a direção ortogonal a $\vec{u}$.

$\vec{v}_2 = \vec{v} - \vec{v}_1$

$$= \text{vetor } \text{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = (2, -1,\ 2) - \left(\frac{3}{2}, \frac{-3}{3}, 0\right)$$

Resp.: $\vec{v}_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2\right)$

3) a medida algébrica da $\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v}$

$$\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Exercícios

> "Ninguém terá direito de ser medíocre no séc. XXI. Na mesa de jogo deste século, a qualidade não será mais um diferencial competitivo, mas o cacife mínimo para pedir as cartas."
>
> *Luiz Almeida Marins Filho, PhD e consultor, numa palestra em Florianópolis*

01. Sendo $\vec{u} = (5, 2, 5)$ e $\vec{v} = (2, -1, 2)$, calcular o vetor $\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v}$.

Resp.: (4, – 2, 4)

02. Dados $\vec{u} = (5, 2, 5)$ e $\vec{v} = (2, -1, 2)$, determinar o vetor $\text{proj}_{\vec{v}}\vec{u}$.

Resp.: $\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)$

03. O valor da medida algébrica da projeção de $\vec{v} = (5, 4, -3)$ sobre $\vec{u} = (0, 3, 0)$ é:

Resp.: 4

04. Achar o vetor projeção de $\vec{v} = 4\vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k}$ sobre um vetor perpendicular a $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$.

Resp.: $\frac{22}{9}\vec{i} + \frac{38}{9}\vec{j} + \frac{41}{9}\vec{k}$ (ou o seu oposto)

05. O vetor projeção de $\vec{u} = (0, 1, 5)$ sobre o vetor $\vec{v} = (3, -5, 1)$ é:

Resp.: (0, 0, 0)

OBSERVAÇÃO

$\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais.

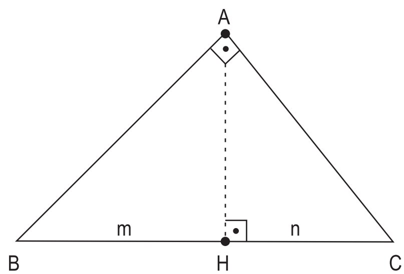
06. Seja o triângulo retângulo em A, de vértices A = (3, –2, 8), B = (0, 0, 2) e C = (–3, –5, 10).

Calcular:

a) $\overrightarrow{BH}$

b) m

c) n



Resp.: a) $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, 4\right)$

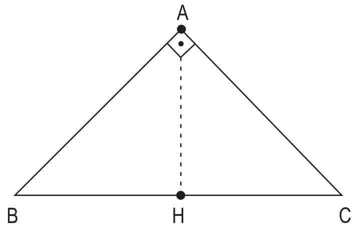
b) $\frac{7\sqrt{2}}{2}$

c) $\frac{7\sqrt{2}}{2}$

01. Calcular os vetores projeção de $\vec{v} = 3\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$ sobre os eixos cartesianos x, y e z.

Resp.: $3\vec{i}, -2\vec{j}, -3\vec{k}$

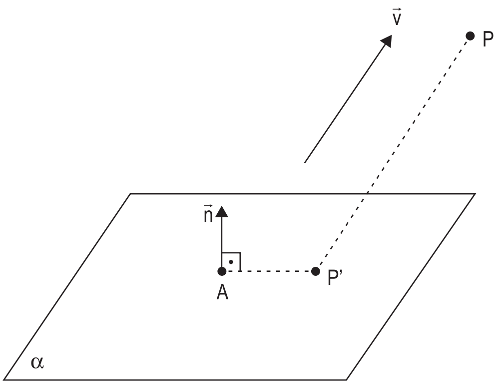
02. Na figura abaixo, tem-se o triângulo retângulo de vértices ABC. Considere H o pé da altura do triângulo relativa ao vértice A e calcule o vetor (H – A). Dados A = (1, 2, –1), B = (–1, 0, –1) e C = (2, 1, 2).



Resp.: $(H - A) = -\frac{14}{19}\vec{i} - \frac{30}{19}\vec{j} + \frac{24}{19}\vec{k}$

2. PROJEÇÃO DE UM PONTO SOBRE UM PLANO

Projeção oblíqua



Seja α um plano individualizado pelo ponto A e por um vetor unitário $\vec{n}$, a ele ortogonal. Queremos as coordenadas de P' que é a projeção do ponto P sobre o plano α, segundo a direção do vetor $\vec{v}$, dado.

Dedução:
O vetor (P' – A) é ortogonal a $\vec{n}$. O vetor (P' – P) é paralelo a $\vec{v}$.

Donde: $(P' - A) \cdot \vec{n} = 0$ ① e
$(P' - P) = k\vec{v} \Rightarrow P' = P + k\vec{v}$ ②

Substituindo ② em ①:
$(P + k\vec{v} - A) \cdot \vec{n} = 0$ ou
$(P - A) \cdot \vec{n} + k\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$

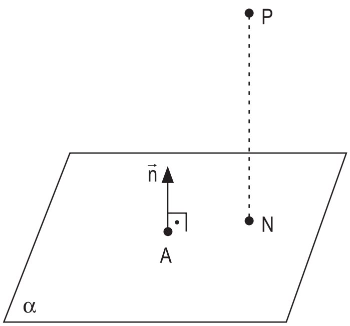
Isolando k:

$$k = \frac{(A - P) \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{v}} \quad ③$$

Substituindo ③ em ②:

$$P' = P + \frac{(A - P) \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{v}} \vec{v}$$

Projeção ortogonal

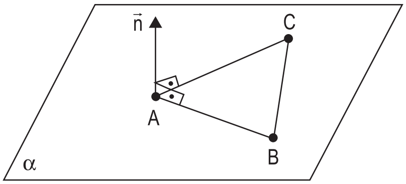


Para este caso, basta substituir na fórmula acima o vetor $\vec{v}$ pelo vetor $\vec{n}$. Lembrando que $\vec{n} \cdot \vec{n} = 1$, obtém-se:

$$N = P + [(A - P) \cdot \vec{n}]\, \vec{n}$$

onde N é denominado **pé da normal** do ponto P sobre o plano α.

Cálculo de $\vec{n}$



Se o plano α for determinado por três pontos A, B e C, o vetor $\vec{n}$, unitário e normal ao plano é obtido por:

$$\vec{n} = \frac{(B - A) \times (C - A)}{|(B - A) \times (C - A)|}$$

Exercícios

> "É impossível evitar que os pássaros da dor, da angústia e do desespero voem sobre nossas cabeças.
> Mas podemos evitar que façam ninhos em nossos cabelos."
>
> *(Provérbio chinês)*

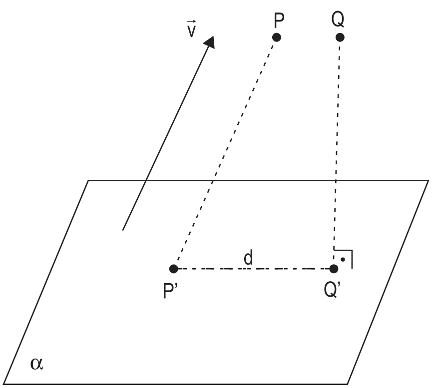
01. Achar as coordenadas da projeção do ponto P sobre o plano determinado por A, B e C, segundo a direção do vetor $\vec{v}$. Dados: A = (2, 1, 0), B = (0, 2, 1), C = (0, 0, 2), P = (0, −1, 0) e $\vec{v} = \vec{i} + \vec{k}$.

Resp.: $P' = \left(\frac{10}{7}, -1, \frac{10}{7}\right)$

02. Calcular as coordenadas da projeção ortogonal de P = (0, −1, 0) sobre o plano determinado pelos pontos A = (2, 1, 0), B = (0, 2, 1) e C = (0, 0, 2).

Resp.: $N = \left(\frac{30}{29}, \frac{-9}{29}, \frac{40}{29}\right)$

03. Seja α um plano determinado pelos pontos A = (0, 0, 3), B = (1, 1, 3) e C = (2, 1, 3). A distância entre os pontos P = (1 , 0, 1) e Q = (x, 0, 2), com x > 0 é $\sqrt{2}$. Considere Q' a projeção ortogonal do ponto Q sobre o plano α, e P' a projeção do ponto P sobre a segundo a direção do vetor $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.



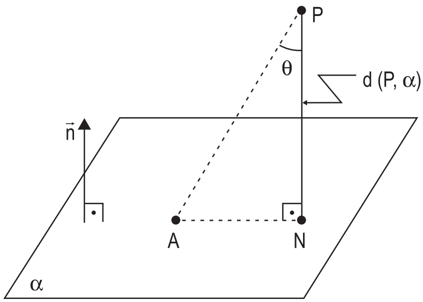
Calcular a distância d entre os pontos P' e Q'.

Resp.: $\sqrt{13}$

04. Considere os pontos A = (1, 0, 1), B = (1, 1, 2), C = (0, 2, 1), D = (1, 2, 0) e E = (3, 0, 0). Calcular a intersecção da reta DE, orientada no sentido de D para E, com o plano ABC.

Resp.: P' = (–2, 5, 0)

3. DISTÂNCIA DE PONTO A PLANO



Considere α um plano que contém o ponto A e ortogonal ao vetor unitário $\vec{n}$. Queremos a distância do ponto P ao plano α.

Dedução:

Do triângulo retângulo PNA:

$$d(P, \alpha) = |(A - P)| \cos \theta$$

O segundo membro da igualdade acima não se altera, se o multiplicarmos por $|\vec{n}|$:

$$d(P, \alpha) = |(A - P)|\,|\vec{n}| \cos \theta$$

que exprime o produto escalar entre os vetores (A – P) e $\vec{n}$. Donde se infere a fórmula:

$$d(P, \alpha) = (A - P) \cdot \vec{n}$$

OBSERVAÇÃO

A d(P, α) é convencionada positiva se o segmento orientado $\overline{PN}$ tiver o sentido de $\vec{n}$; negativa se $\overline{PN}$ tiver o sentido contrário a $\vec{n}$.

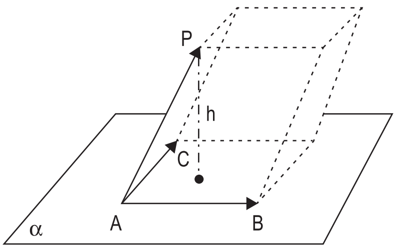
Pé da normal (N)

Trata-se da fórmula da projeção ortogonal de um ponto sobre um plano (deduzida no item anterior).

Então:

$$N = P + [(A - P) \cdot \vec{n}]\,\vec{n} \quad \text{ou} \quad N = P + d(P, \alpha)\,\vec{n}$$

Se o plano α for individualizado por três pontos A, B e C, é mais cômodo calcular a distância do ponto P ao plano a como a altura do paralelepípedo cujas arestas são (B – A), (C – A) e (P – A).



d (P, α) = h (altura do paralelepípedo)

$$= \frac{\text{volume do paralelepípedo}}{\text{área da base}}$$

$$d(P,\alpha) = \frac{(B-A) \times (C-A) \cdot (P-A)}{|(B-A) \times (C-A)|}$$

Exercícios

"Todos os que meditaram a arte de governar os homens se convenceram de que o destino de um país depende da educação dos jovens."

Aristóteles (384-322 a.C.), filósofo grego.

01. Conhecidos os pontos A = (0, 1, 2), B = (1, 1, 3), C = (1, 3, 3) e D = (2, 1, 5), achar:

a) a altura do tetraedro ABCD relativa ao vértice A;

Resp.: $h = \frac{\sqrt{5}}{5}$

b) o pé da normal baixada de A sobre o plano BCD.

Resp.: $N = \left(\frac{2}{5}, 1, \frac{9}{5}\right)$

01. Dados os pontos A = (2, 4, 0), B = (0, 2, 4), C = (6, 0, 2), calcular:

a) a altura do tetraedro OABC relativa a O (origem);

Resp.: $h = \frac{13\sqrt{2}}{5}$

b) o pé da normal baixada de O sobre o plano ABC.

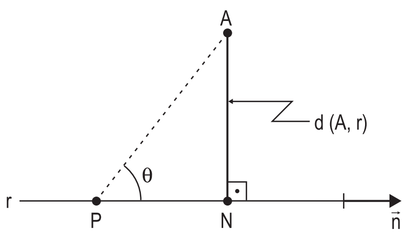
Resp.: $N = \left(\frac{39}{25}, \frac{13}{5}, \frac{52}{25}\right)$

01. Achar a distância do ponto P ao plano determinado pelos pontos A, B e C.
Dados: P = (–5, –4, 8), A = (2, 3, 1), B = (4, 1, –2) e C = (6, 3, 7).

Resp.: 11

"Não concordo com uma só palavra do que dizeis, mas defenderei até a morte o direito de dizê-la."
François M. Voltaire (1964-1778), escritor francês

4. DISTÂNCIA DE PONTO A RETA



Consideremos um ponto A e uma reta r, esta individualizada por um ponto P e por um vetor unitário $\vec{n}$, que tem a sua direção. Buscamos a distância do ponto A à reta r.

Do triângulo retângulo ANP:

$$d(A, r) = |(A - P)| \text{ sen } \theta$$

que não se altera se multiplicarmos o 2.º membro por $|\vec{n}|$:

$$d(A, r) = |(A - P)|\, |\vec{n}| \text{ sen } \theta$$

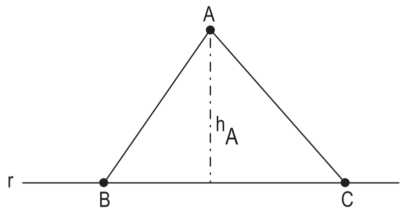
que expressa o módulo do produto externo entre os vetores (A – P) e $\vec{n}$. Com efeito:

$$d(A, r) = |(A - P) \times \vec{n}|$$

Cálculo do pé da normal (N)

N é o pé da normal do ponto A sobre a reta r. Com as devidas precauções quanto ao posicionamento dos pontos e do vetor $\vec{n}$, pode-se empregar a fórmula do parágrafo anterior:

$$N = P\ [(A - P)|\ .\ \vec{n}\ ]\vec{n}$$



Se a reta r for determinada por dois pontos B e C, a distância do ponto A à reta BC pode ser obtida:

$$d\ (A, r) = h_A \text{ (altura do triângulo)}$$
$$= \frac{2 \text{ (área do triângulo)}}{\text{comprimento da base}}$$

$$d(A,\ r) = \frac{|(A - B) \times (C - B)|}{|(C - B)|}$$

Exercícios

"O princípio mais profundamente enraizado na natureza humana é a ânsia de ser apreciado."
Willian James (1842-1910), filósofo norte-americano.

01. 01. Dados os pontos A = (0, 1, 2), B = (1, 1, 3), C = (1, 3, 4), determinar:

a) a altura do triângulo ABC relativa a A;

Resp.: $h = \frac{3\sqrt{5}}{5}$

b) o pé da normal baixada de A sobre a reta BC.

Resp.: $N = \left(1, \frac{3}{5}, \frac{14}{5}\right)$

01. Os pontos A = (2, 4, 0), B = (0, 2, 4) e C = (6, 0, 2) são vértices de um triângulo. Pede-se:

a) a área do triângulo;

Resp.: $10\sqrt{2}$

b) a altura relativa ao vértice B;

Resp.: $\frac{10\sqrt{2}}{3}$

c) o pé da normal baixada de B sobre a reta AC.

Resp.: $N = \left(\frac{26}{9}, \frac{28}{9}, \frac{4}{9}\right)$

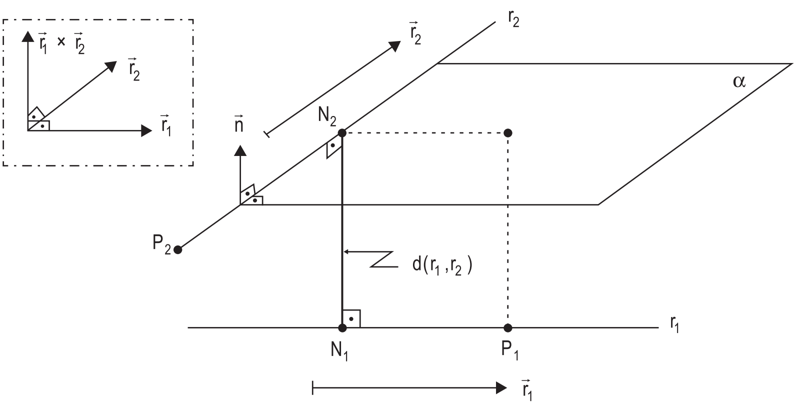
01. Calcular a distância do ponto P = (1, 2, 0) à reta determinada pelos pontos A = (0, 1, 2) e B = (3, 0, 1).

Resp.: $\frac{5\sqrt{22}}{11}$

5. DISTÂNCIA ENTRE DUAS RETAS

A reta r_1 é passante por P_1 e paralela ao vetor $\vec{r}_1$. A reta r_2 contém o ponto P_2 e tem a direção do vetor $\vec{r}_2$. Nosso escopo é obter a fórmula da distância entre as retas reversas r_1 e r_2.

Dedução:



Seja a um plano auxiliar que contém a reta r_2 e é paralelo à reta r_1. Destarte, a distância $d(r_1, r_2)$ entre as retas r_1 e r_2 é a distância de um ponto de r_1 ao plano α. Na figura:

$$d(r_1, r_2) = (P_1, \alpha)$$

Empregando para o 2º membro a fórmula da distância de ponto a plano:

$$d(r_1, r_2) = (P_1 - P_2) . \vec{n}$$

Onde $\vec{n} = \text{vers}\,(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)$. Por isso:

$$d(r_1, r_2) = (P_2 - P_1) . \text{vers}\,(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)$$

ou

$$d(r_1, r_2) = \frac{(P_2 - P_1) . r_1 \times r_2}{|r_1 \times r_2|}$$

cujo resultado deve ser adotado em módulo. Faz-se mister registrar que no quociente acima tem-se para numerador o volume de um paralelepípedo de arestas $(P_2 - P_1)$, $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$; para denominador a área de sua base.

Cálculo dos pés da normal comum (N_1, N_2)

O vetor $(N_1 - P_1)$ é paralelo ao vetor $\vec{r}_1$, e $(N_2 - P_2)$ é paralelo ao vetor $\vec{r}_2$. Impondo a condição de paralelismo:

$$(N - P_1) = k_1\vec{r}_1 \Rightarrow N_1 = P_1 + k_1\vec{r}_1 \quad ①$$

e

$$(N - P_2) = k_2\vec{r}_2 \Rightarrow N_2 = P_2 + k_2\vec{r}_2 \quad ②$$

Subtraindo membro a membro ① de ② tem-se:

$$(N_2 - N_1) = (P_2 - P_1) + k_2\vec{r}_2 - k_1\vec{r}_1 \quad ③$$

Roteiro para o cálculo de k_1 e k_2

1) Multiplica-se escalarmente ③ por $\vec{r}_1$;

2) Multiplica-se escalarmente ③ por $\vec{r}_2$;

3) Resolve-se o sistema de duas equações do 1º grau em k_1 e k_2;

4) Substitui-se k_1 em ① obtendo-se N_1. O k_2 é substituído em ② para se obter N_2.

OBSERVAÇÃO

Tendo-se N_1 e N_2 é útil enfatizar que $N_1 N_2 = d(r_1, r_2)$.

Exercícios

"Os maiores inimigos do homem estão dentro do próprio homem: são as mágoas, os ressentimentos."

De um cacique indígena

01. As retas r_1 e r_2 são determinadas por:

$$r_1 \begin{cases} P_1 = (0,\ 1,\ 1) \\ \vec{r}_1 = \vec{i} + \vec{k} \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2 \begin{cases} P_2 = (1,\ 2,\ 1) \\ \vec{r}_2 = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k} \end{cases}$$

achar:

a) a distância entre as retas r_1 e r_2;

Resp.: $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

b) os pés da normal comum.

Resp.: $N_1 = (0,\ 1,\ 1);\ N_2 = \left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{5}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$

01. Dadas as retas r_1 e r_2, sendo:

$$r_1 \begin{cases} P_1 = (0,\ 1,\ 2) \\ \vec{r}_1 = \vec{i} + 2\vec{k} \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2 \begin{cases} P_2 = (2,\ 0,\ 1) \\ \vec{r}_2 = \vec{j} - 2\vec{k} \end{cases}$$

calcular:

a) a distância entre as retas r_1 e r_2;

Resp.: $\frac{7}{3}$

b) as coordenadas dos pés da normal comum;

Resp.: $N_1 = \left(\frac{4}{9},\ 1,\ \frac{26}{9}\right)$; $N_2 = \left(2, -\frac{5}{9},\ \frac{19}{9}\right)$

c) as coordenadas do pé N da normal baixada de P_1 sobre o plano por r_2 paralelo a r_1 (Barsotti).

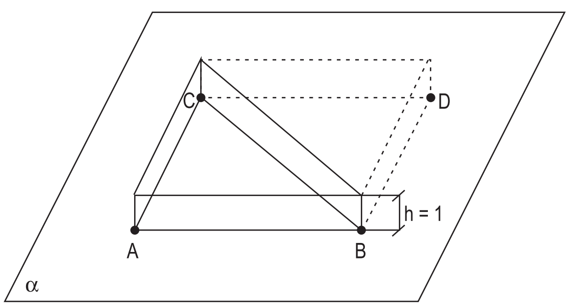
Resp.: $N_1 = \left(\frac{14}{9},\ -\frac{5}{9},\ \frac{11}{9}\right)$

6. ÁREA DE UM TRIÂNGULO

OBSERVAÇÃO

A critério do professor os itens 6, 7 e 8 são dispensáveis.

Preliminares



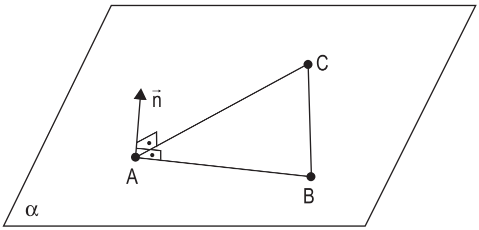
Depreende-se da figura que o volume do prisma de base ABC equivale à metade do volume do paralelepípedo (Vp) de base ABDC.

$$V_{prisma} = \frac{1}{2} V_p$$

Numericamente, a área do triângulo ABC coincide com o volume do prisma de base ABC, desde que o admitamos de altura unitária. Portanto:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} V_p \quad \text{(para h = 1)}$$

Área de um triângulo num plano orientado

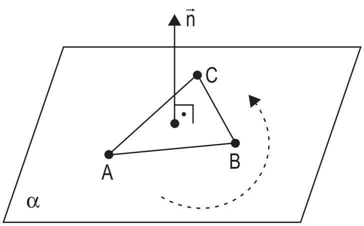


Consideremos um plano α determinado pelos pontos A, B, C e orientado pelo vetor $\vec{n}$, unitário e a ele ortogonal. Face o exposto decorre que:

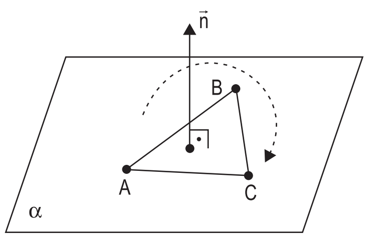
$$S_{ABC} = \frac{1}{2}(B - A) \times (C - A) \cdot \vec{n}$$

Convenção de sinal

A área do triângulo será positiva se os vértices ABC estiverem no sentido anti-horário e negativa se os vértices ABC estiverem no sentido horário. Assim, para um observador postado ao longo de $\vec{n}$, tem-se:

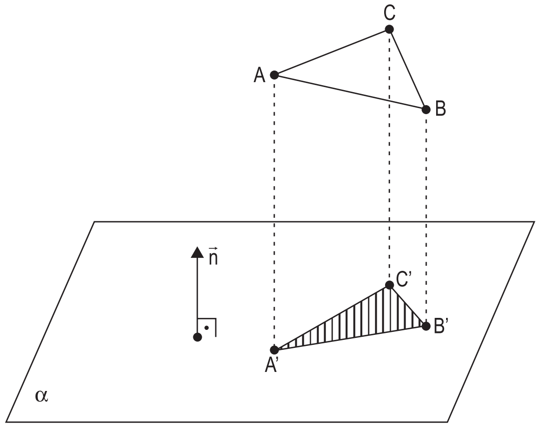


$S_{ABC} > 0$



$S_{ABC} < 0$

7. ÁREA DA PROJEÇÃO ORTOGONAL DE UM TRIÂNGULO SOBRE UM PLANO



Pede-se a área da projeção ortogonal de um triângulo ABC sobre um plano α, orientado pelo vetor $\vec{n}$, ortogonal ao plano.

Então:

$$S_{A'B'C'} = \frac{1}{2}(B' - A') \times (C' - A') \cdot \vec{n} \qquad ①$$

Na figura, o vetor (B' – A') representa o vetor soma dos vetores (B' – B), (B – A) e (A – A'). Assim:

$$(B' - A') = (B' - B) + (B - A) + (A - A')$$

Analogamente para o vetor (C' – A'):

$$(C' - A') = (C' - C) + (C - A) + (A - A')$$

Então:

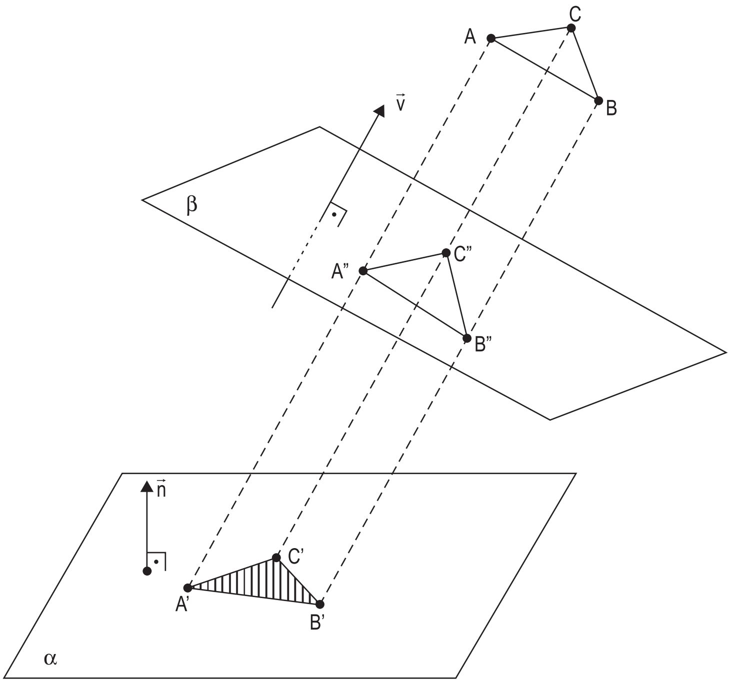
$$(B' - A') \times (C' - A') = [(B' - B) + (B - A) + (A - A')] \times [(C' - C) + (C - A) + (A - A')]$$

Aplicando ao 2º membro a propriedade distributiva do produto vetorial, observa-se a nulidade de 8 termos, resultando simplesmente o termo (B – A) x (C – A), o qual é substituído em ①:

$$S_{A'B'C'} = \frac{1}{2}(B - A) \times (C - A) \cdot \vec{n}$$

que representa a fórmula da área da projeção ortogonal de um triângulo sobre um plano orientado pelo vetor unitário $\vec{n}$.

8. ÁREA DA PROJEÇÃO NÃO ORTOGONAL DE UM TRIÂNGULO SOBRE UM PLANO



Seja α um plano orientado pelo vetor $\vec{n}$, unitário e a ele ortogonal. Procura-se a área da projeção do triângulo ABC sobre o plano α, segundo a direção do vetor $\vec{v}$ (representada na figura por A'B'C').

Tracemos um plano auxiliar β, que seja normal ao vetor $\vec{v}$. Conforme se infere da figura, A"B"C" é a área da projeção ortogonal do triângulo ABC, bem como do triângulo A'B'C' sobre β.

Matematicamente, a área da:

$$\text{proj}_{\beta}\ ABC = \text{proj}_{\beta}\ A'B'C'$$

Porém, do parágrafo anterior a área de:

$$A''B''C'' = proj_{\beta}ABC = \frac{1}{2}(B-A)x(C-A) \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

$$A''B''C'' = proj_{\beta}A'B'C' = \frac{1}{2}(B'-A')x(C'-A') \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

donde:

$$\frac{1}{2}(B'-A')x(C'-A') \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{1}{2}(B-A)x(C-A) \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \quad ①$$

Vimos no produto externo que $\frac{1}{2}|\vec{u} \times \vec{v}| = S_{ABC}$ e por consequência $\frac{1}{2}(\vec{u} \times \vec{v}) = (S_{ABC})\vec{n}$, sendo $\vec{n}$ um vetor unitário. Por analogia tem-se a igualdade:

$$(S_{A'B'C'})\vec{n} = \frac{1}{2}(B'-A')x(C'-A') \quad ②$$

Substituindo ② em ①:

$$(S_{A'B'C'})\vec{n}\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{1}{2}(B-A)x(C-A) \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

Isolando $S_{A'B'C'}$, e em ambos os membros cancelando $|\vec{v}|$:

$$S_{A'B'C'} = \frac{(B-A)x(C-A) \cdot \vec{v}}{2\vec{n} \cdot \vec{v}}$$

fórmula que fornece a área da projeção de um triângulo ABC, segundo a direção do vetor $\vec{v}$.

Exercícios

> "A tragédia começa quando os dois acham que têm razão".
>
> *Shakespeare (1564-1616), dramaturgo e poeta inglês.*

01. Conhecendo-se os pontos A = (0, 1, 2), B = (1, 1, 3) e C = (1, 3, 4), calcular:

a) a área da projeção ortogonal do triângulo ABC sobre o plano orientado por $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$;

Resp.: $-\frac{3\sqrt{2}}{4}$

b) a área da projeção de ABC sobre o mesmo plano, porém segundo a direção do vetor $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{k}$.

Resp.: $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

01. Sejam os pontos A = (3, 0, 0), B = (2, 2, 1) e C = (1, 1, –1), determinar:

a) a medida do lado a;

Resp.: $\sqrt{6}$ u.c.

b) a medida do ângulo A;

Resp.: 60º

c) a área do triângulo ABC;

Resp.: $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ u.a.

d) a altura relativa ao vértice A do triângulo ABC;

Resp.: $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ u.c.

e) o pé da normal baixada de A sobre a reta BC;

Resp.: $N = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)$

f) a altura relativa a O (origem) do tetraedro OABC;

Resp.: $\sqrt{3}$ u.c.

g) o pé da normal baixada de O (origem) sobre o plano ABC;

Resp.: N = (–1, –1, 1)

h) o volume do tetraedro OABC;

Resp.: $\frac{3}{2}$ u.v.

i) a área da projeção ortogonal de ABC sobre o plano orientado por $\vec{r} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ e a ele ortogonal;

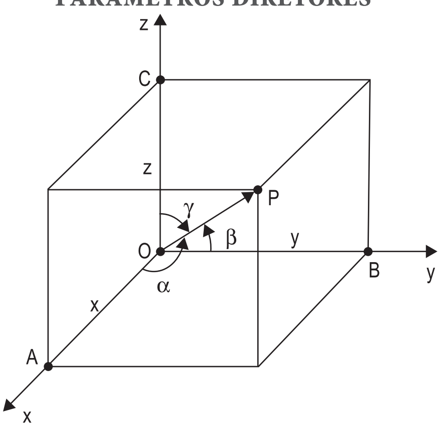
Resp.: $-\frac{3}{2}$ u.a.

j) a área da projeção do triângulo ABC sobre o mesmo plano, mas segundo a direção de $\vec{v} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.

Resp.: $-\frac{18}{11}$ u.a.

9. COSSENOS DIRETORES DE UM VETOR

Parâmetros diretores



São as projeções do vetor $\vec{v}$ sobre os eixos cartesianos.

Na figura equivale aos segmentos de medidas algébricas:

OA = x;
OB = y;
OC = z.

Ângulos diretores

São as menores medidas dos ângulos α, β e γ que o vetor $\vec{v}$ forma com os eixos cartesianos x, y e z, respectivamente.

Frize-se que $0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq \pi$.

Cossenos diretores

Os cossenos dos ângulos diretores são denominados cossenos diretores, quais sejam: $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$.

O vetor $\vec{v}$ tem a expressão cartesiana:

$\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ e módulo

$$|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Obtém-se a figura que:

$$OA = x = |\vec{v}| \cos\alpha \text{ (do triângulo retângulo OAP)}$$

$$OB = y = |\vec{v}| \cos\beta \text{ (do triângulo retângulo OBP)}$$

$$OC = z = |\vec{v}| \cos\gamma \text{ (do triângulo retângulo OCP)}$$

Das igualdades acima:

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\vec{v}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{y}{|\vec{v}|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{|\vec{v}|} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Relembramos que, quando se expressa $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, os coeficientes x, y e z são as medidas algébricas das projeções do vetor $\vec{v}$ sobre os eixos cartesianos.

Teoremas

I) A soma dos quadrados dos cossenos diretores de qualquer vetor é igual à unidade.

Dedução:

Seja $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ um vetor; dos cossenos diretores, temos:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma =$$

$$= \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)^2 + \left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)^2$$

$$= \frac{x^2}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{z^2}{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$= 1$$

Então:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

II) Os cossenos diretores de $\vec{v}$ são as coordenadas do versor de $\vec{v}$.

Dedução:

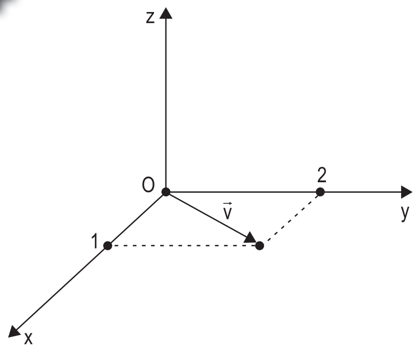
$$\text{vers } \vec{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{|\vec{v}|}$$

$$= \frac{x}{|\vec{v}|}\vec{i} + \frac{y}{|\vec{v}|}\vec{j} + \frac{z}{|\vec{v}|}\vec{k}$$

$$= (\cos\alpha)\,\vec{i} + (\cos\beta)\,\vec{j} + (\cos\gamma)\,\vec{k}$$

$$\text{vers } \vec{v} = (\cos\alpha)\,\vec{i} + (\cos\beta)\,\vec{j} + (\cos\gamma)\,\vec{k}$$

OBSERVAÇÃO



Decorre desta última expressão que sempre que um vetor tem nulo um coeficiente, tal vetor é ortogonal ao eixo homônimo da coordenada faltante, pois se $\cos \varnothing = 0$, resulta que $\varnothing = 90°$.

Exemplificando (vide ilustração) o vetor $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j}$ é perpendicular ao eixo z.

III) Se $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são dois vetores, cujos cossenos diretores são, respectivamente, $\cos \alpha_1$, $\cos \beta_1$, $\cos \gamma_1$ e $\cos \alpha_2$, $\cos \beta_2$, $\cos \gamma_2$, então o ângulo θ entre $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ é dado por:

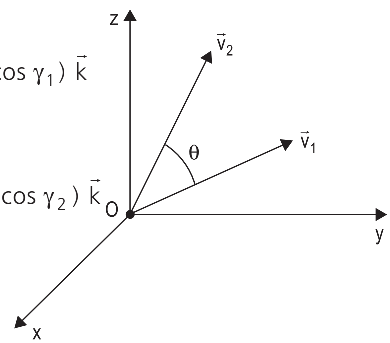
$$\cos \theta = \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2$$

Demonstração: Sejam os versores

$$\text{vers } \vec{v}_1 = (\cos \alpha_1)\, \vec{i} + (\cos \beta_1)\, \vec{j} + (\cos \gamma_1)\, \vec{k}$$

e

$$\text{vers } \vec{v}_2 = (\cos \alpha_2)\, \vec{i} + (\cos \beta_2)\, \vec{j} + (\cos \gamma_2)\, \vec{k}$$



Do produto escalar obtém-se:

$$\cos \theta = \frac{\vec{v}_1 \,.\, \vec{v}_2}{|\vec{v}_1||\vec{v}_2|} = \frac{\vec{v}_1}{|\vec{v}_1|} \,.\, \frac{\vec{v}_2}{|\vec{v}_2|} \quad \text{ou}$$

$$\cos \theta = (\text{vers } \vec{v}_1) \,.\, (\text{vers } \vec{v}_2) \quad \text{ou}$$

$$\cos \theta = [(\cos \alpha_1)\vec{i} + (\cos \beta_1)\vec{j} + (\cos \gamma_1)\vec{k}] \,.\, [(\cos \alpha_2)\vec{i} + (\cos \beta_2)\vec{j} + (\cos \gamma_2)\vec{k}]$$

donde:

$$\cos \theta = \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2$$

Exercícios

> "Há homens que lutam por um dia e são bons; há outros que lutam por um ano e são melhores; há aqueles que lutam por muitos anos e são muito bons; porém há homens que lutam por toda a vida: esses são imprescindíveis."
>
> *Bertold Brecht (1898-1956), escritor e teatrólogo alemão.*

01. 01. Sendo $\vec{v} = \vec{i} - \vec{k}$, calcular:

a) os parâmetros diretores de $\vec{v}$;

Resp.: 1, 0, –1

b) os cossenos diretores de $\vec{v}$;

Resp.: $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 0, $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) os ângulos diretores de $\vec{v}$.

Resp.: $\alpha = 45^\circ$; $\beta = 90^\circ$; $\gamma = 135^\circ$

01. Num vetor $\vec{v}$ são conhecidos $\cos\alpha = \frac{2}{3}$ e $\cos\beta = \frac{2}{3}$ determinar:

a) cos γ (γ é ângulo agudo);

Resp.: $\frac{1}{3}$

b) vers $\vec{v}$.

Resp.: $\text{vers}\ \vec{v} = \frac{2}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{1}{3}\vec{k}$

01. Os ângulos diretores de um vetor são 120°, β e 60°. Achar β.

Resp.: 45° e 135°

02. Dados os pontos A = (4, 3, –1) e B = (6, 1, 0), calcular $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma$ do vetor $\vec{v} = (B - A)$.

Resp.: $\frac{1}{3}$

03. Determinar o vetor $\vec{u}$ do espaço tridimensional, sabendo que $|\vec{u}| = 2$ e que forma ângulos de 90 e 150º respectivamente com os eixos x e y.

Resp.: $\vec{u} = (0, -\sqrt{3}, 1)$ ou $\vec{u} = (0, -\sqrt{3}, -1)$

04. $\alpha_1 = 60°$, $\beta_1 = 120°$ e $\gamma_1 = 60°$ são os ângulos diretores do vetor $\vec{v}_1$. Do vetor $\vec{v}_2$ são $\alpha_2 = 45°$, $\beta_2 = 90°$, $\gamma_2 = 135°$.
Calcular o ângulo θ entre $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$.

Resp.: $\theta = 90º$ $(\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2)$

05. Pedem-se os cossenos diretores do vetor $\vec{u} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} + 2\overrightarrow{DA}$, sendo A = (–2, 1, 0), B = (0, –3, 1), C = (1, –3, 2) e D = (1, 0, –4).

Resp.: $-\frac{5}{\sqrt{93}}, -\frac{2}{\sqrt{93}}, -\frac{8}{\sqrt{93}}$

06. Seja o vetor $\vec{v}$, com $|\vec{v}| = 4$ e seus ângulos diretores $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$ e $\gamma = 120°$. Calcular as projeções do vetor $\vec{v}$ sobre os eixos cartesianos.

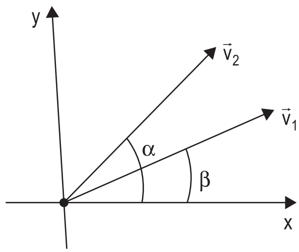
Resp.: $2\sqrt{2}, 2, -2$

> "Não há pessoas más. Há pessoas que não foram suficientemente amadas."
>
> *João XXIII, papa de 1958-1963.*

Série B

07. No plano cartesiano, demostrar:
$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \text{sen}\,\alpha\, \text{sen}\,\beta$

SUGESTÃO



vers $\vec{v}_1 = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos(90^\circ - \alpha)\vec{j} = \cos\alpha\,\vec{i} + \text{sen}\,\alpha\,\vec{j}$
vers $\vec{v}_2 = \cos\beta\,\vec{i} + \cos(90^\circ - \beta)\vec{j} = \cos\beta\,\vec{i} + \text{sen}\,\beta\,\vec{j}$
Efetuando a multiplicação interna:
(vers $\vec{v}_1$) . (vers $\vec{v}_2$) = $(\cos\alpha\,\vec{i} + \text{sen}\,\alpha\,\vec{j}) \cdot (\cos\beta\,\vec{i} + \text{sen}\,\beta\,\vec{j})$
$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \text{sen}\,\alpha\, \text{sen}\,\beta$ (qed)

"SÓ UMA VEZ
Nosso filho terá 3 anos
e estará doido para
sentar em nosso colo.

SÓ UMA VEZ
Ele terá 5 anos
e quererá brincar conosco.

SÓ UMA VEZ
Ele terá 10 anos e desejará
estar conosco em nosso
trabalho.

SÓ UMA VEZ
Ele será adolescente
e verá em nós um amigo
com quem conversar.

SÓ UMA VEZ
Ele estará na universidade
e quererá trocar idéias
conosco.

SE NÓS
Perdermos essas oportunidades,
nós perderemos o nosso filho
e ele não terá pai."

A lição dos gansos canadenses

Uma maravilhosa lição de vida pode ser obtida dos gansos selvagens canadenses que migram do Hemisfério Norte para o Sul. Como arautos de mudanças, quando partem, é prenúncio de frio. Ao retornarem, é chegado o verão.

Guiados pelo sol e pelo campo magnético da Terra, cumprem a rota mais curta e só estabelecem grandes curvas para evitar desertos e oceanos.

Neste longo voo, a formação do bando é a de um triângulo; ou, a rigor, de um majestoso V, cujo vértice está voltado para a frente. Nesta formação geométrica, cada pássaro da frente cria um vácuo para o de trás, rendendo ao grupo quase o dobro do aproveitamento com o mesmo esforço.

Da mesma forma, quando um conjunto de pessoas compartilha do mesmo objetivo e de forma organizada, é mais leve a tarefa de cada um e os resultados são extraordinários.

Ao ganso da frente cabe a tarefa de dar direção ao bando. E, quando cansa, alterna a posição de ponta com outro pássaro. É o líder. Em seu peito, batem as rajadas do vento forte, os pingos da chuva castigam seus olhos. Mas é ele, o líder, que tem as asas fortalecidas, que melhor vislumbra o horizonte, que melhor contempla as belezas do sol nascente e do sol poente. Os problemas são como as rajadas de vento que nos fortalecem para enfrentarmos a vida com mais determinação. E Deus nunca nos dá tudo. Mas também não nos priva de tudo. E por maior que sejam as dificuldades, Ele não permite embates maiores que a nossa capacidade de vencê-los.



Os líderes sacrificam muitas vezes a si próprios por uma causa relevante cujo maior prêmio não é o triunfo, mas a imensa satisfação do dever cumprido. E se fracassarmos "resta o conforto de que mais valem as lágrimas de não ter vencido do que a vergonha de não ter lutado".

Quando um dos gansos é ferido ou fica doente, *incontinenti*, dois deles saem da formação e lhe dão companhia e proteção. É a manifestação da solidariedade em se postar ao lado das pessoas em seus momentos difíceis. Quem não tem amor e amizade em seu coração, sofre da pior doença cardíaca.

Na formação angular, os gansos que vêm atrás grasnam freneticamente para motivar os da frente. Na convivência em grupo, não só é importante a nossa efetiva participação mas também as palavras encorajadoras. Pessoas motivadas são mais felizes e produtivas. A ação organizada unida ao entusiasmo produz uma força insuperável.

Terás uma rota segura por conta dos bons ensinamentos que te foram transmitidos pelos pais, professores e bons amigos. São eles que revestiram e revestirão a tua existência com carinho, dedicação e muitas vezes sacrificam os próprios sonhos em favor dos teus. São eles que abrem as portas do teu futuro, iluminando o teu caminho com a luz mais brilhante que puderam encontrar: o estudo, os bons exemplos e as lições de vida. São eles que muitas vezes renunciam a tudo por ti, menos a ti.

Educar tem raiz numa palavra latina belíssima: ducere, que significa conduzir, marchar à frente ou mostrar o caminho.

A esses grandes educadores, pais, professores e bons amigos, a nossa eterna gratidão.

A história dos gansos canadenses é
reiteradamente verbalizada em
cursos de motivação.

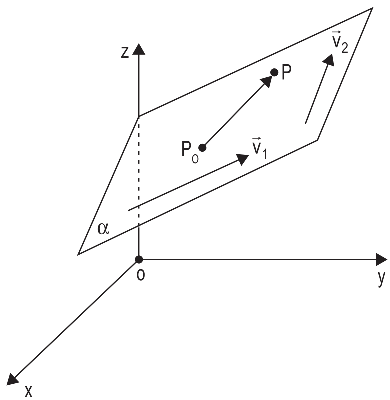
Texto do autor.

PLANO NO E^3

CAPÍTULO 7

1. EQUAÇÃO GERAL DO PLANO

O PLANO É DETERMINADO POR UM PONTO E POR DOIS VETORES



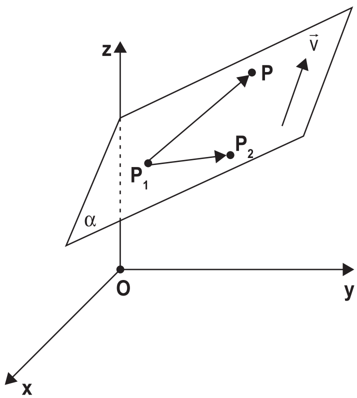
Dados:

$P_o = (x_o, y_o, z_o)$
$\vec{v}_1 = \ell_1\vec{i} + m_1\vec{j} + n_1\vec{k}$
$\vec{v}_2 = \ell_2\vec{i} + m_2\vec{j} + n_2\vec{k}$

O plano α contém o ponto P_o e é paralelo aos vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ ($\vec{v}_1$ não paralelo a $\vec{v}_2$). O ponto P = (x, y, z) pertencerá ao plano α se, e somente se, os vetores $(P - P_o)$, $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ forem coplanares:

$$\begin{vmatrix} x - x_o & y - y_o & z - z_o \\ \ell_1 & m_1 & n_1 \\ \ell_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (I)$$

O plano é individualizado por dois pontos e por um vetor



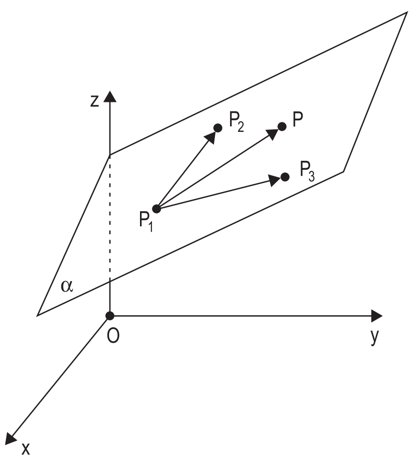
Dados:

$P_1 = (x_1, y_1, z_1)$
$P_2 = (x_2, y_2, z_2)$
$\vec{v} = \ell\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}$

O plano α é passante por P_1 e P_2 e é paralelo ao vetor $\vec{v}$. Um ponto genérico P = (x, y, z) pertence ao plano α se, e somente se, os vetores $(P - P_1)$, $(P_2 - P_1)$ e $\vec{v}$ forem coplanares:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \ell & m & n \end{vmatrix} = 0 \quad \text{(II)}$$

O plano é definido por três pontos não colineares



Dados:

$P_1 = (x_1, y_1, z_1)$
$P_2 = (x_2, y_2, z_2)$
$P_3 = (x_3, y_3, z_3)$

O plano α é determinado pelos pontos P_1, P_2 e P_3. Um ponto genérico $P = (x, y, z)$ pertence ao plano α se, e somente se, os vetores $(P - P_1)$, $(P_2 - P_1)$ e $(P_3 - P_1)$ forem coplanares:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{(III)}$$

A resolução de cada determinante representado por (I), (II) ou (III) conduz a uma equação linear a três variáveis:

$$ax + by + cz + d = 0$$

cognominada **equação geral do plano**.

Exercícios

"Não basta destruir o que sobra; é necessário construir o que falta."

Anônimo.

01. Equação geral do plano que contém o ponto $A = (3, 0, 1)$ e é paralelo aos vetores $\vec{u} = (1, 2, 0)$ e $\vec{v} = (0, 3, 1)$.

Resp.: $2x - y + 3z - 9 = 0$

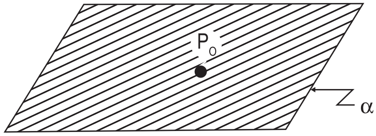
02. Achar a equação do plano que passa pelos pontos $P = (1, 2, 3)$ e $Q = (1, 2, 0)$ e tem a direção do vetor $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{k}$.

Resp.: $y - 2 = 0$

03. Obter a equação do plano que contém os pontos $A = (3, 0, 1)$, $B = (2, 1, 1)$ e $C = (3, 2, 2)$.

Resp.: $x + y - 2z - 1 = 0$

2. PERTINÊNCIA DE PONTO A PLANO



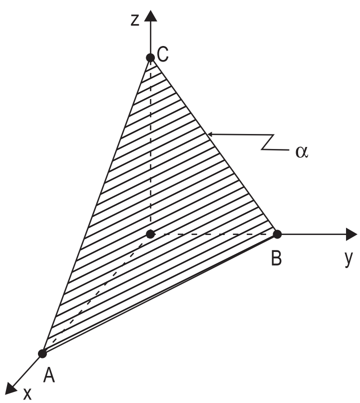
Dado um plano α de equação ax + by + cz + d = 0 e um ponto $P_o = (x_o, y_o, z_o)$, a condição para P_o pertencer a α é:

$$a(x_o) + b(y_o) + c(z_o) + d = 0$$

ou seja, a tripla (x_o, y_o, z_o) deve satisfazer à equação de α.

Exemplo:
O ponto A = (3, 1, 2) pertence ao plano α: 2x + y – 3z – 1 = 0.

3. INTERSEÇÃO DE UM PLANO COM OS EIXOS COORDENADOS



Seja α: ax + by + cz + d = 0

Interseção com o eixo x

O plano α intercepta o eixo das abscissas no ponto A = (x, 0, 0). Para se determinar o ponto A basta fazer y = z = 0 na equação do plano.

Interseção com o eixo y

O plano α intercepta o eixo das ordenadas no ponto B = (0, y, 0). Na equação do plano fazemos x = z = 0.

Interseção com o eixo z

O plano α intercepta o eixo das cotas no ponto C = (0, 0, z); para obtermos suas coordenadas basta fazer x = y = 0 na equação do plano.

Exemplo:

Determinar os pontos de interseção do plano α: $4x + 3y - z - 12 = 0$ com os eixos coordenados.

a) Interseção com o eixo x.

Fazendo nulos y e z na equação de α:

$4x - 12 = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow A = (3, 0, 0)$

b) Interseção com o eixo y.
Fazendo $x = z = 0$:

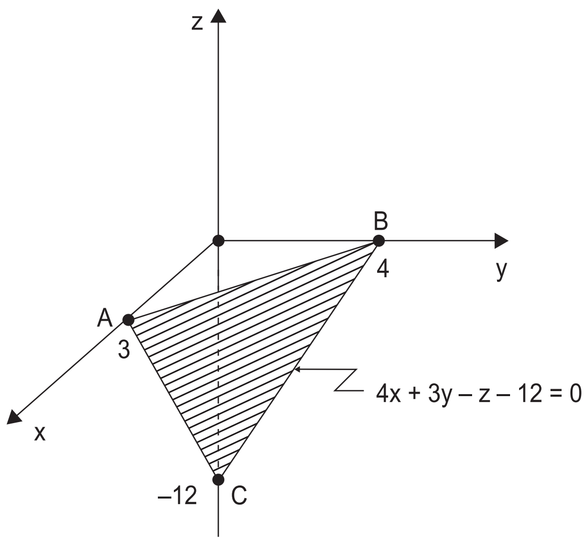
$3y - 12 = 0 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow B = (0, 4, 0)$

c) Interseção com o eixo z.

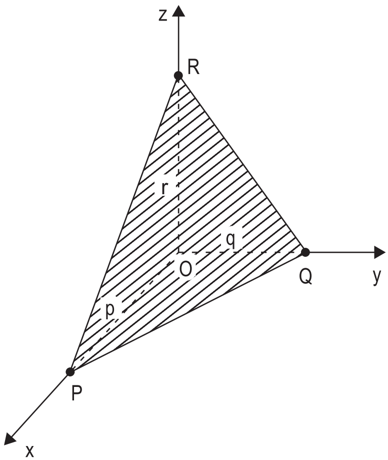
Fazendo $x = y = 0$:

$- z - 12 = 0 \Rightarrow z = - 12 \Rightarrow C = (0, 0, -12)$

d) Plotagem do plano no sistema cartesiano:



4. EQUAÇÃO SEGMENTÁRIA DO PLANO



O plano

α: $ax + by + cz + d = 0$ com $a \cdot b \cdot c \cdot d \neq 0$ corta os eixos cartesianos em três pontos distintos P, Q e R, que determinam os três segmentos OP, OQ e OR. Indicaremos por p, q e r, respectivamente, as medidas desses segmentos.

$$\left.\begin{array}{l} P = (p,\ 0,\ 0) \in \alpha \Rightarrow ap + d = 0 \Rightarrow p = \dfrac{-d}{a} \\ Q = (0,\ q,\ 0) \in \alpha \Rightarrow bq + d = 0 \Rightarrow q = \dfrac{-d}{b} \\ R = (0,\ 0,\ r) \in \alpha \Rightarrow cr + d = 0 \Rightarrow r = \dfrac{-d}{c} \end{array}\right\} \text{①}$$

Voltemos à equação de α:

$ax + by + cz = -d$

dividindo por $(-d)$

$$\frac{ax}{-d} + \frac{by}{-d} + \frac{cz}{-d} = 1$$

ou

$$\frac{x}{-d/a} + \frac{y}{-d/b} + \frac{z}{-d/c} = 1 \quad \text{②}$$

Substituindo ① em ②:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1$$

denominada **equação segmentária** do plano, por interceptar os eixos x, y e z em segmentos p, q e r.

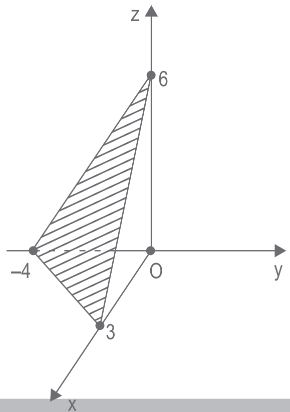
Exemplo:

Obter a equação segmentária do plano $4x - 3y + 2z - 12 = 0$.

Solução:

Plano dado

$4x - 3y + 2z = 12$



$$\frac{4x}{12} - \frac{3y}{12} + \frac{2z}{12} = 1 \text{ ou}$$

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{-4} + \frac{z}{6} = 1$$

Exercícios

"Quem aos 20 anos não é de esquerda, não tem coração; quem continua sendo aos 40, não tem cabeça."

Autoria incerta.

01. Obter a equação segmentária do plano α: $2x + 3y - 4z - 24 = 0$.

Resp.: $\frac{x}{12} + \frac{y}{8} + \frac{z}{-6} = 1$

02. Obter os pontos de interseção do plano $x + 2y - 4z + 5 = 0$ com os eixos coordenados.

Resp.: $A = (-5,\ 0,\ 0)$; $B = \left(0, -\frac{5}{2},\ 0\right)$; $C = \left(0,\ 0,\ \frac{5}{4}\right)$

03. Determinar a equação do plano que passa pelo ponto A = (1, 2, –1) e que corta os eixos coordenados em segmentos iguais.

Resp.: $x + y + z - 2 = 0$

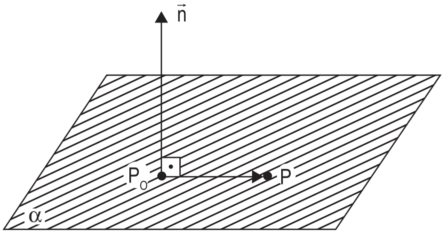
04. Equação geral do plano que intercepta os eixos y e z em segmentos de comprimento 2 e 2 e passa pelo ponto A = (1, 3, –3).

Resp.: $2x + y + z - 2 = 0$

05. Determinar o volume do tetraedro limitado pelo plano $3x + 2y + 2z - 6 = 0$ e pelos planos coordenados.

Resp.: 3u.v.

5. EQUAÇÃO DO PLANO QUE PASSA POR UM PONTO E ORTOGONAL A UM VETOR



Queremos a equação do plano α que passa pelo ponto $P_o = (x_o, y_o, z_o)$ e seja ortogonal ao vetor $n = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$.

Observe que, aqui, $\vec{n}$ é o **vetor normal** a um plano e não necessariamente unitário.

Dedução:

Seja P = (x, y, z) um ponto genérico de α. Então:

$(P - P_o) = (x - x_o)\,\vec{i} + (y - y_o)\,\vec{j} + (z - z_o)\,\vec{k}$ e

$n = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$

Os vetores $(P - P_o)$ e $\vec{n}$ são ortogonais; logo, seu produto interno deve ser nulo:

$(P - P_o) \cdot \vec{n} = 0$

$a(x - x_o) + b(y - y_o) + c(z - z_o) = 0$

ou

$$ax + by + cz + \underbrace{(-ax_0 - by_0 - cz_0)}_{d} = 0$$

ou ainda

$$\alpha: ax + by + cz + d = 0$$

Comparando com $\vec{n}$, verificamos que os coeficientes a, b e c da equação geral de um plano são, nesta ordem, as coordenadas de um **vetor normal** a esse plano.

Exemplo:

Equação do plano que passa pelo ponto A = (1, 3, 5) e seja ortogonal ao vetor $\vec{n} = (2, 4, 6)$.

Solução:

a) Equação do plano
$\alpha: 2x + 4y + 6z + d = 0$

b) $A = (1, 3, 5) \in \alpha$
$2(1) + 4(3) + 6(5) + d = 0 \Rightarrow d = -44$

c) Resposta: $\alpha: 2x + 4y + 6z - 44 = 0$

Exercícios

"O poder é como violino: pega-se com a esquerda mas toca-se com a direita."

Anônimo.

01. Equação geral do plano que contém o ponto $P_o = (0, 1, 3)$ e seja ortogonal ao vetor $\vec{n} = (3, 2, 5)$.

Resp.: $3x + 2y + 5z - 17 = 0$

02. Determine um vetor unitário perpendicular ao plano $\sqrt{2}x + y - z + 5 = 0$

Resp.: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ ou o seu oposto.

6. CASOS PARTICULARES DA EQUAÇÃO GERAL DO PLANO

A nulidade de um ou mais coeficientes na equação geral do plano, fará com que este ocupe um posicionamento particular em relação aos eixos coordenados.

Na equação ax + by + cz + d = 0, se:

1º caso:

d = 0 $\Rightarrow$ ax + by + cz = 0 (com $a \cdot b \cdot c \neq 0$)

O plano contém a origem.

Justificativa:

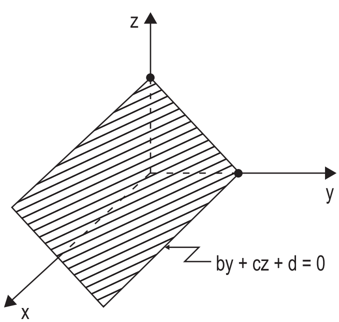
O ponto O = (0, 0, 0) verifica a equação ax + by + cz = 0.

Se o termo independente for nulo, **o plano conterá a origem**.

2º caso:

a) **a = 0** $\Rightarrow$ by + cz + d = 0 (com $b \cdot c \cdot d \neq 0$)

O plano é paralelo ao eixo x.



Justificativa:

O vetor normal ao plano by + cz + d = 0 é $\vec{n}$ = (0, b, c) que é perpendicular ao eixo x. Logo, o plano é paralelo ao eixo x.

Analogamente, se:

b) **b = 0** $\Rightarrow$ ax + cz + d = 0 (com $a \cdot c \cdot d \neq 0$)

O plano é paralelo ao eixo y.

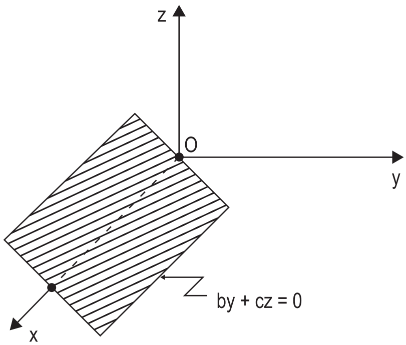
c) **c = 0** $\Rightarrow$ ax + by + d = 0 (com $a \cdot b \cdot d \neq 0$)

O plano é paralelo ao eixo z.

EM RESUMO: O plano é sempre paralelo ao eixo da coordenada ausente.

3º caso:

a) **a = d = 0** $\Rightarrow$ by + cz = 0 (com b . c $\neq$ 0)
O plano conterá o eixo x.



Justificativa:

O plano by + cz = 0 além de conter a origem (pois d = 0) é paralelo ao eixo x, pois tem como vetor normal o $\vec{n} = (0, b, c)$.

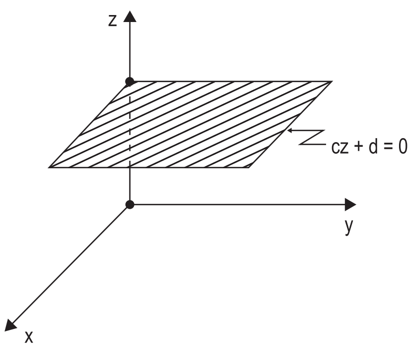
Analogamente, se:

b) **b = d = 0** $\Rightarrow$ ax + cz = 0 (com a · c $\neq$ 0)
O plano conterá o eixo y.

c) **c = d = 0** $\Rightarrow$ ax + by = 0 (com a · b $\neq$ 0)
O plano conterá o eixo z.

4º caso:

a) **a = b = 0** $\Rightarrow$ cz + d = 0 (com c · d $\neq$ 0)
O plano é paralelo ao plano xy.

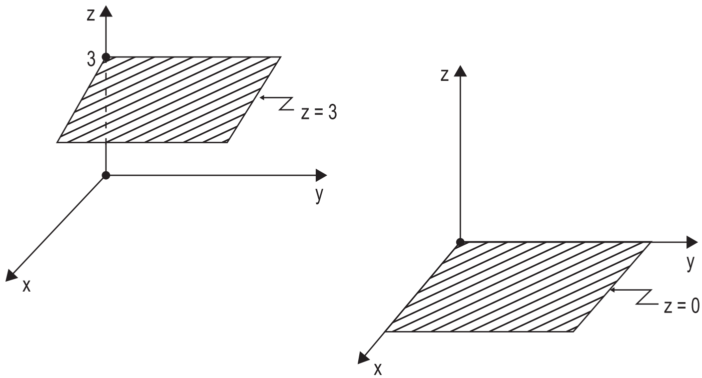


Justificativa:

O plano cz + d = 0 tem como vetor normal o $\vec{n} = (0, 0, c)$ que é paralelo ao eixo z. Isto posto, o plano intercepta o eixo z e é paralelo ao plano xy.

OBSERVAÇÃO

Se $cz + d = 0 \Rightarrow z = \frac{-d}{c} \Rightarrow z = k$ (que representa um plano paralelo ao plano xy e intercepta o eixo z no ponto k). Em particular, z = 0 é a equação do plano coordenado xy. Assim:



b) **b = c = 0** $\Rightarrow ax + d = 0$ (com $a \cdot d \neq 0$)
O plano é paralelo ao plano yz.

OBSERVAÇÃO

Se $ax + d = 0 \Rightarrow x = \frac{-d}{a} \Rightarrow x = k$. Em particular, x = 0 é a equação do plano coordenado yz.

c) **a = c = 0** $\Rightarrow by + d = 0$ (com $b \cdot d \neq 0$)
O plano é paralelo ao plano xz.

OBSERVAÇÃO

Se $by + d = 0 \Rightarrow y = \frac{-d}{b} \Rightarrow y = k$. Em particular, y = 0 representa o plano coordenado xz.

EM RESUMO:

Se dois dos coeficientes das variáveis forem nulos, a equação representa um plano paralelo ao plano das variáveis que não figuram na equação.

Exemplo:

Indicar o posicionamento de cada plano em relação ao sistema cartesiano:

a) $3x + y - 4z = 0 \Rightarrow$ plano que passa pela origem.

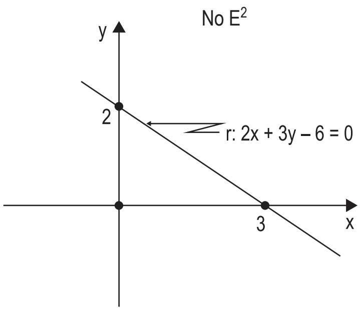
b) $2x + 3z - 3 = 0 \Rightarrow$ plano paralelo ao eixo y.

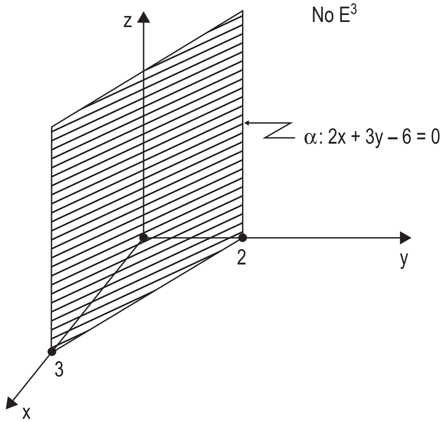
c) $4x + 3y = 0 \Rightarrow$ plano que contém o eixo z.

d) $x - 4z = 0 \Rightarrow$ plano que contém o eixo y.

e) $x - 3 = 0 \Rightarrow$ plano paralelo ao plano yz.

N.B.: No E^2 a equação $2x + 3y - 6 = 0$ representa uma reta. Entretanto, no E^3 tal equação representa um plano paralelo ao eixo z.





Exercícios

> "Importa muito hoje que o candidato a uma vaga no mercado de trabalho seja comunicativo, saiba trabalhar em grupo, tenha conhecimento de uma especialidade e seja capaz de tomar decisões."
>
> *Nilson José Machado (n. 1947), professor da USP, numa palestra em Curitiba.*

01. Dado o plano α: $2x + 3y + z - 3 = 0$, pergunta-se se os pontos $A = (1, 1, -2)$ e $B = (2, 0, 1)$ pertencem a α.

Resp.: $A \in \alpha$ e $B \notin \alpha$.

02. Obter a equação do plano que passa por $P = (1, 2, 1)$ e $Q = (3, 1, -1)$ e seja paralelo ao eixo y.

Resp.: $x + z - 2 = 0$

03. Calcular a equação do plano passante por $P = (1, 3, 3)$ e paralelo ao plano xy.

Resp.: $z - 3 = 0$

04. Plano que contém o eixo x e o ponto $A = (1, 3, 3)$.

Resp.: $y - z = 0$

05. Equação cartesiana do plano que passa pelos pontos $A = (0, 1, 2)$ e $B = (1, 3, 0)$ e seja paralelo ao eixo x.

Resp.: $y + z - 3 = 0$

06. Achar m para que o ponto $A = (m, 1, 2)$ pertença ao plano $x + 2y - z + 5 = 0$.

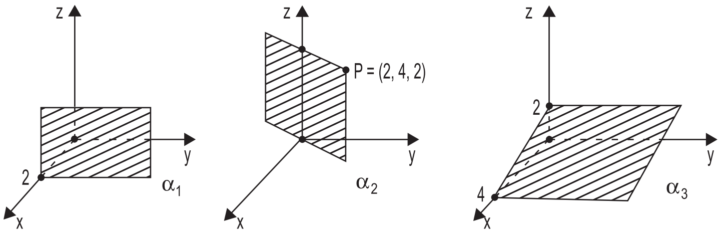
Resp.: $m = -5$

07. Nas figuras abaixo, determine as equações dos planos, sabendo-se que:

a) α_1 é paralelo ao plano yz;

b) α_2 passa por P e contém o eixo z;

c) α_3 é paralelo ao eixo y.



Resp.: a) α_1: $x - 2 = 0$; b) α_2: $2x - y = 0$; c) α_3: $x + 2z - 4 = 0$

01. Achar a equação do plano que passa pela origem e é perpendicular ao vetor $\vec{u} = (2, -1, 3)$.

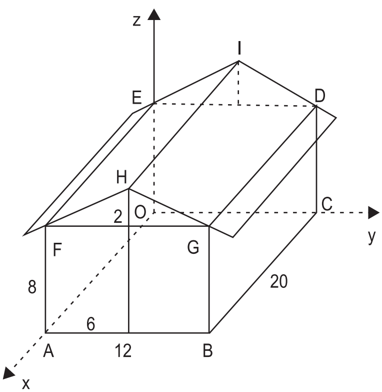
Resp.: $2x - y + 3z = 0$

Série B

"Certas escolas têm cheiro de morte por matarem a criatividade dos alunos."

Anônimo

02. (VISSOTO LEITE) A figura abaixo representa um galpão. Os números representam as dimensões do galpão. Determine:



a) equações dos planos que contêm os telhados e as paredes;

b) o volume do galpão.

Resp.: a) (EIFH) $y - 3z + 24 = 0$
(IHDG) $y + 3z - 36 = 0$
(ABFG) $x - 20 = 0$
(BCDG) $y - 12 = 0$
(OEAF) $y = 0$
(OEDC) $x = 0$

b) 2.160 u.v.

7. PARALELISMO E ORTOGONALIDADE DE DOIS PLANOS

Dados os planos:

$\alpha_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$

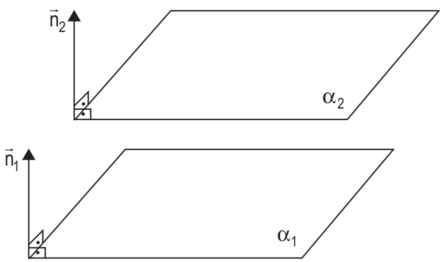
$\alpha_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$

Então $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$ são respectivamente os vetores normais aos planos α_1 e α_2 e podem ser representados por:

$\vec{n}_1 = a_1\vec{i} + b_1\vec{j} + c_1\vec{k}$

$\vec{n}_2 = a_2\vec{i} + b_2\vec{j} + c_2\vec{k}$

Condição de paralelismo



Os planos α_1 e α_2 são paralelos se, e somente se, os vetores $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$ o forem, isto é, se e somente se, os coeficientes das variáveis homônimas forem proporcionais:

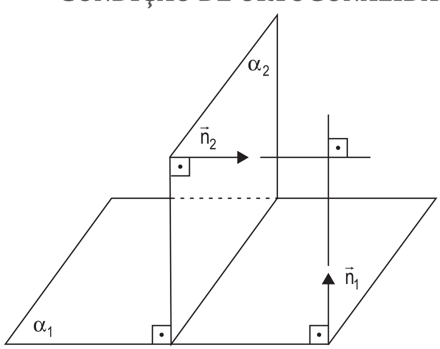
$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

Em particular, os planos α_1 e α_2 serão coincidentes se:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2}$$

Neste caso, a equação do plano α_2 é o produto da equação de α_1 por uma constante k.

Condição de ortogonalidade



A condição de ortogonalidade de α_1 e α_2 é a mesma condição de ortogonalidade dos vetores $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$:

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$$

Exercícios

> "A metade do mundo sempre ser-te-á adversa: se fores bom, os maus combater-te-ão; se fores mau, os bons combater-te-ão."
>
> *Sabedoria árabe*

01. Calcular a e b para que os planos $2x + 3y + 3 = 0$ e $(a - 2)x + 6y + (b - 1)z + 5 = 0$ sejam paralelos.

Resp.: $a = 6$ e $b = 1$

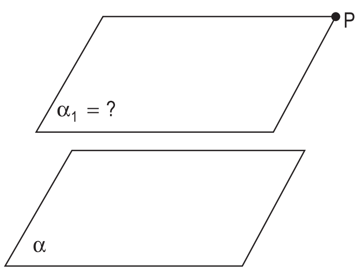
02. Determinar k para que os planos $2x + 3z - 1 = 0$ e $3x + y + kz + 2 = 0$ sejam ortogonais.

Resp.: $k = -2$

03. Equação do plano que contenha $P = (0, 1, 2)$ e seja paralelo a $\alpha: 2x + 3y - z + 5 = 0$.

Resp.: $2x + 3y - z - 1 = 0$

SUGESTÃO



1) α_1 é paralelo a α:

$\alpha_1: 2x + 3y - z + d = 0$

2) $P \in \alpha_1$:

$2(0) + 3(1) - (2) + d = 0$
$d = -1$

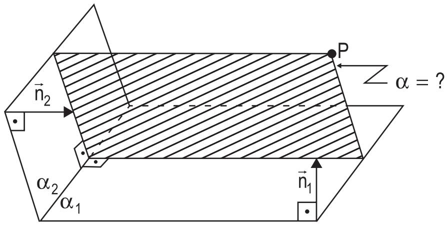
04. Equação do plano que passa pelo ponto $A = (3, 5, 0)$ e é:

a) paralelo ao plano $\alpha: 2x + y - 3z + 1 = 0$;

b) ortogonal aos planos $\alpha_1: x + y + 2z - 2 = 0$; e $\alpha_2: x - y + z - 3 = 0$

Resp.: a) $2x + y - 3z - 11 = 0$; b) $3x + y - 2z - 14 = 0$

01. Obter o plano que contém P = (0, 1, 2) e é ortogonal aos planos $\alpha_1: x + y - z + 5 = 0$ e $\alpha_2: 2x + 2y + z + 1 = 0$.



Resp.: x − y + 1 = 0

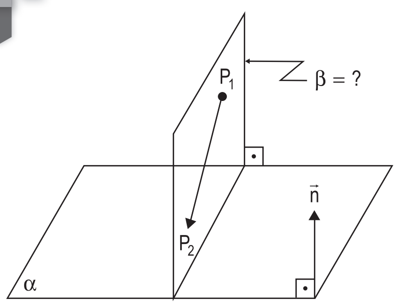
Observe na figura que, queremos um plano que passe pelo ponto P = (0, 1, 2) e tenha a direção dos vetores $\vec{n}_1 = (1, 1, -1)$ e $\vec{n}_2 = (2, 2, 1)$. Então:

$$\alpha : \begin{vmatrix} x-0 & y-1 & z-2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

02. Obter a equação do plano que passa pelos pontos $P_1 = (1, 3, 0)$ e $P_2 = (2, 0, 1)$ e é ortogonal ao plano $\alpha: x + y - z + 3 = 0$.

Resp.: x + y + 2z − 4 = 0

SUGESTÃO



Depreende-se da figura que queremos um plano β que passa pelo ponto P_1, e tem a direção dos vetores $(P_2 - P_1)$ e $\vec{n} = (1, 1, -1)$.

$$\beta : \begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

03. Equação geral do plano que passa pelos pontos A = (2, 0, 5) e B = (0, 1, 0) e é perpendicular ao plano $\alpha: x + 3y - z - 7 = 0$.

Resp.: 2x − y − z + 1 = 0

04. Obter a equação do plano perpendicular ao plano xy e que contenha os pontos A = (−4, 7, 1) e B = (1, 3, −1).

Resp.: $4x + 5y - 19 = 0$

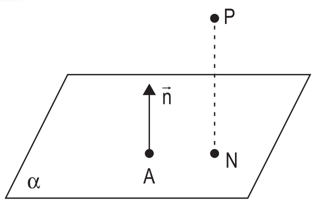
Série B

Encantam-me as pessoas que vão além do seu dever.

05. Determinar as coordenadas da projeção ortogonal do ponto P = (0, 1, 2) sobre o plano α: 4x − 2z + 2 = 0.

Resp.: $N = \left(\frac{2}{5}, 1, \frac{9}{5}\right)$

SUGESTÃO



Fórmula (deduzida à pág. 133):

$N = P + [(A - P) \cdot \text{vers } \vec{n}] \text{ vers } \vec{n}$, onde A é um dos infinitos pontos de α.

Por exemplo: A = (1, 1, 3).

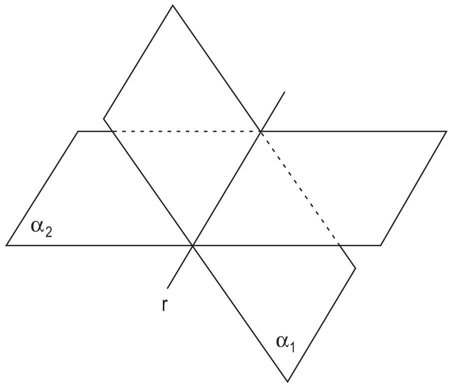
06. Achar a projeção ortogonal do ponto A = (3, 1, 3) sobre o plano α : x + y + z − 4 = 0.

Resp.: N = (2, 0, 2)

07. Dado o ponto P = (3, 6, 1) e um plano α: x + y + z − 13 = 0, achar o ponto P', simétrico de P em relação a α.

Resp.: P'= (5, 8, 3)

8. EQUAÇÃO DO FEIXE DE DOIS PLANOS



Considere α_1 e α_2 dois planos que se interceptam segundo uma reta real r. Assim, no espaço tridimensional a reta r pode ser representada por:

$$r = \begin{cases} \alpha_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ \alpha_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

Denominamos **FEIXE DE PLANOS** de eixo r, ao conjunto de todos os planos que passam pela reta r.

Equação do feixe de planos:

Multipliquemos a equação de α_2 por um número real λ e somemos com a equação de α_1:

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 + \lambda(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0 \quad (*)$$

Para cada valor de λ, a equação (*) representa um plano que passa pela reta interseção de α_1 e α_2, pois qualquer ponto P = (x, y, z) dessa interseção satisfaz as equações de α_1, de α_2 e de (*).

Consoante o exposto, a equação de um plano que passa pela interseção de dois planos pode ser determinada mediante o conhecimento de uma condição que permita calcular a constante λ.

A equação (*) – que em notação simplificada será representada por $\alpha_1 + \lambda\alpha_2 = 0$ – é denominada **equação do feixe de dois planos**.

Exemplo:

Achar a equação do plano que contenha a reta

$$r:\begin{cases} 2x + y - z + 1 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases} \qquad \text{e o ponto } P = (1, 3, 0)$$

Solução:

a) Equação do feixe de planos

$2x + y - z + 1 + \lambda(x + y - 1) = 0$ (*)

b) $P = (1,3,0) \in$ (*)

$2(1) + (3) - (0) + 1 + \lambda(1 + 3 - 1) = 0 \Rightarrow \lambda = -2$

c) Substituindo $\lambda = -2$ em (*)

$2x + y - z + 1 - 2(x + y - 1) = 0$ ou

$y + z - 3 = 0$ (resposta)

Exercícios

> "O professor é o mais importante arquiteto. Se estes constroem prédios de tijolos e concreto, ferro e vidro, aquele ergue templos de carne e osso."
>
> *João Manoel Simões (n. 1938), advogado e escritor português radicado no Paraná.*

01. Obter a equação do plano que contém a reta:

$$r:\begin{cases} \alpha_1: x + y - z + 3 = 0 \\ \alpha_2: x - y + 2z + 5 = 0 \end{cases}$$

e seja paralelo ao eixo das abscissas.

Resp.: $2y - 3z - 2 = 0$

SUGESTÃO

1) Equação do feixe de planos que ⊃ r:

$$x + y - z + 3 + \lambda(x - y + 2z + 5) = 0$$

ou

$$\underbrace{(1+\lambda)}_{\displaystyle \| \atop \displaystyle 0} x + (1 - \lambda) y + (-1 + 2\lambda) z + 3 + 5\lambda = 0$$

2) Se o plano deve ser paralelo ao eixo x, o seu coeficiente deve ser nulo:

$$1 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -1$$

02. Pede-se a equação do plano que passa pela origem e que contém a reta

$$r: \begin{cases} x + y - z - 8 = 0 \\ 2x + z + 4 = 0 \end{cases}$$

Resp.: $5x + y + z = 0$

03. Calcular a equação do plano que contém a reta

$$r: \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

e é perpendicular ao plano π: $x + 2z - 3 = 0$.

Resp.: $2x - y - z + 6 = 0$

04. Determinar a equação do plano que passa pela reta de interseção dos planos $x - 3y - z + 3 = 0$ e $3x + y - 2z + 2 = 0$ e é perpendicular ao plano yz.

Resp.: $10y + z - 7 = 0$

05. Equação do plano determinado pelo ponto A = (0, 1, 1) e pela reta

$$r: \begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

Resp.: $3x + y + 4z - 5 = 0$

06. Dado o feixe de planos: $x + y - 3z + 5 + \lambda(2x + 3y - 5z + 1) = 0$ pede-se a equação do plano pertencente ao feixe e que passa pela origem do sistema cartesiano.

Resp.: $9x + 14y - 22z = 0$

Série B

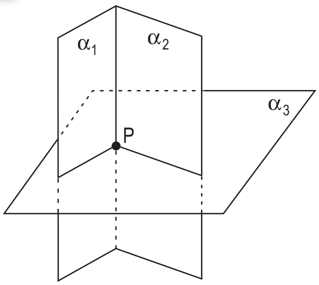
"Perde tudo quem perde o momento certo."

Provérbio espanhol.

07. Os planos α_1: $6x - 5y + 2z - 8 = 0$, α_2: $x - 2y - 2z + 1 = 0$ e α_3: $6x + 2y - 5z - 1 = 0$ se interceptam em um único ponto P. Determine-o.

Resp.: $P = (1, 0, 1)$

SUGESTÃO



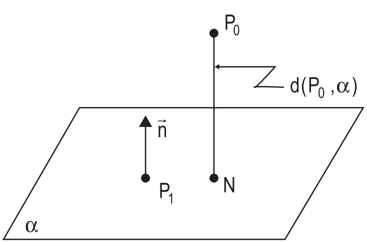
Resolva o sistema:

$$\begin{cases} 6x - 5y + 2z - 8 = 0 \\ x - 2y - 2z + 1 = 0 \\ 6x + 2y - 5z - 1 = 0 \end{cases}$$

OBSERVAÇÃO

Três (ou mais) planos que se interceptam segundo um ponto P formam uma **estrela de planos**. O ponto P é o centro da estrela.

9. DISTÂNCIA DO PONTO P_O A UM PLANO α



Dados:

$P_o = (x_o, y_o, z_o)$

α: $ax + by + cz + d = 0$

Com o escopo de utilizar a fórmula da página 135, consideremos um ponto genérico $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ de α e o vetor $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$, ortogonal a α.

Então:

$d(P_O, \alpha) = (P_1 - P_O) \cdot \text{vers}\ \vec{n}$

ou (em módulo)

$d(P_O, \alpha) = |\,(P_O - P_1) \cdot \text{vers}\ \vec{n}\,|$ ①

Porém:

$$\left.\begin{aligned} &(P_O - P_1) = (x_O - x_1, y_O - y_1, z_O - z_1) \text{ e} \\ &\text{vers}\ \vec{n} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{(a,\ b,\ c)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \end{aligned}\right\} ②$$

Substituindo ② em ①:

$$d(P_O, \alpha) = \left|(x_o - x_1,\ y_o - y_1,\ z_o - z_1)\ .\ \frac{(a,\ b,\ c)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\right|$$

$$= \frac{|a(x_o - x_1) + b(y_o - y_1) + c(z_o - z_1)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$= \frac{|ax_o + by_o + cz_o + (-ax_1 - by_1 - cz_1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Mas se $P_1 = (x_1, y_1, z_1) \in \alpha$:

$ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0$ ou

$d = -ax_1 - by_1 - cz_1$

Consequentemente:

$$d(P_o\,,\ \alpha) = \frac{|\ ax_o + by_o + cz_o + d\ |}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Exercícios

> "O melhor lenço para uma lágrima é o sorriso da mulher amada."
> *Dito popular*

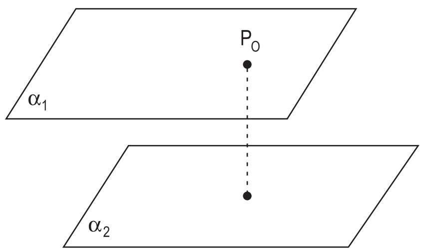
01. Calcular a distância do ponto $P_O = (1, 0, 1)$ ao plano $\alpha: 2x + 2y - 2z + 3 = 0$

Resp.: $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

02. Os planos $\alpha_1: x + y + z - 4 = 0$ e $\alpha_2: 2x + 2y + 2z - 3 = 0$ são paralelos. Determinar a distância entre eles.

Resp.: $\dfrac{5\sqrt{3}}{6}$

SUGESTÃO



Seja $P_O = (4, 0, 0)$ um ponto qualquer de α_1.

$d(\alpha_1, \alpha_2) = d(P_O, \alpha_2)$

03. Achar o ponto do eixo das cotas equidistante do ponto $A = (1, -2, 0)$ e do plano $2x + 3y + 6z - 9 = 0$.

Resp.: $P = (0,\ 0, -2)$ ou $P' = \left(0,\ 0, -\dfrac{82}{13}\right)$

04. Obter as equações dos planos paralelos ao plano $2x + y - 2z + 1 = 0$ e que distam 3 unidades da origem.

Resp.: $2x + y - 2z \pm 9 = 0$

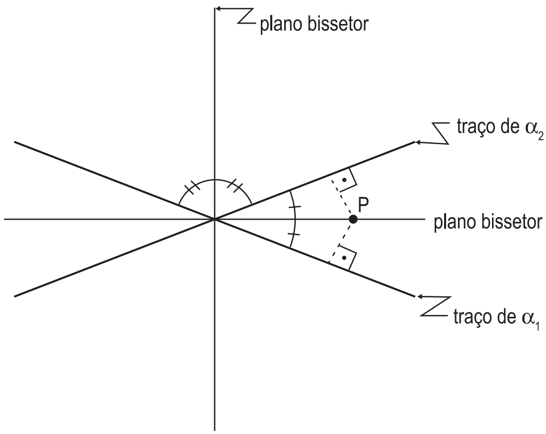
05. Quais os valores de k para que o plano $x + 2y - 2z + k = 0$ diste da origem 4 unidades?

Resp.: $k = \pm 12$

06. Encontrar um ponto do eixo y cuja distância ao plano x + 2y – 2z – 2 = 0 é de 2 unidades.

Resp.: P = (0, –2, 0) ou P'= (0, 4, 0)

10. EQUAÇÕES DOS PLANOS BISSETORES



Para uma melhor visualização da figura, os planos α_1 e α_2 estão representados por seus traços (planos de topo).

DEFINIÇÃO: Um plano é bissetor quando passa pela interseção de outros dois, formando com estes ângulos diedros congruentes. Os planos α_1 e α_2 possuem dois planos bissetores.

Considere:

α_1: $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$
α_2: $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$

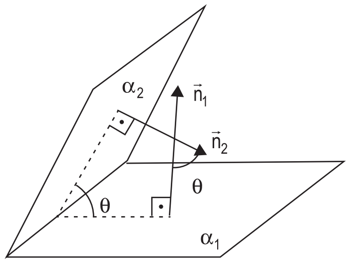
Seja P = (x, y, z) um ponto arbitrário de um plano bissetor. As distâncias do ponto P às faces do diedro devem ser iguais:

$d(P, \alpha_1) = d(P, \alpha_2)$

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1z + d_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}} = \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2z + d_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

que representam as equações dos dois planos bissetores do diedro formado pelos planos α_1 e α_2.

11. ÂNGULO DE DOIS PLANOS



Dados:

α_1: $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$

α_2: $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$

Sejam:

$\vec{n}_1 = a_1\vec{i} + b_1\vec{j} + c_1\vec{k}$ e $\vec{n}_2 = a_2\vec{i} + b_2\vec{j} + c_2\vec{k}$

os vetores normais dos planos α_1 e α_2, respectivamente. Considere θ o menor ângulo entre os vetores $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$. Por construção, θ também é o menor ângulo entre os planos α_1 e α_2. Do produto escalar:

$$\cos\ \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} \qquad (0° \leq \theta \leq 90°)$$

ou

$$\cos\ \theta = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\ \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

Em particular, se $\theta = 90°$, então $\cos\theta = 0$; donde $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$, que obviamente indica a já conhecida condição de ortogonalidade de dois planos.

Exercícios

> "Nada de grandioso pode ser obtido sem entusiamo."
>
> *Ralph Waldo Emerson (1803-1882), poeta e filósofo norte-americano.*

01. Dados os planos α_1: x + 2y – 3z – 1 = 0 e α_2: 3x – y + 2z – 5 = 0, obter:

a) a equação dos planos bissetores;

b) o ângulo agudo entre os planos α_1 e α_2.

Resp.: a) 2x – 3y + 5z – 4 = 0 e 4x + y – z – 6 = 0 ; b) $\theta = \text{arc cos}\frac{5}{14} = 69°04'$

01. Determinar o valor de "k" para que seja de 60° o ângulo entre os planos α_1: kx + 2y + 2z + 1 = 0 e α_2: x – y + z + 3 = 0.

Resp.: $k = 2\sqrt{6}$

Série B

> "Pequenas coisas só afetam as mentes pequenas."
>
> *Benjamin Disraeli (1804-1881), político e escritor inglês.*

02. Escrever as equações dos planos que contêm a reta

$$r: \begin{cases} x - z = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases}$$

e que formam com o plano α: x + y + z – 1 = 0 um ângulo de 60°.

Resp.: $x \pm \sqrt{6}y - z \pm 2\sqrt{6} = 0$

SUGESTÃO

Equação do feixe de planos que ⊃ r:

$x - z + \lambda(y - 2) = 0$ ou $x + \lambda y - z - 2\lambda = 0$ ①

Aplique a fórmula do ângulo entre os planos ① e α.

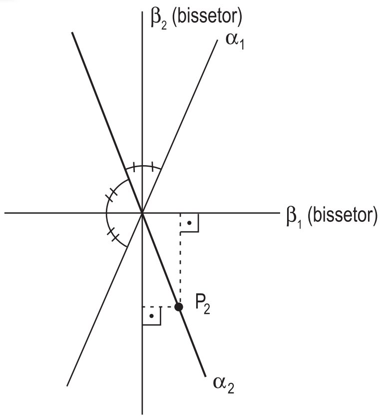
03. Calcular o ângulo entre o plano coordenado yz e o plano $x + y + z - 3 = 0$.

Resp.: $\theta = \text{arc cos}\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

04. Obter a equação do plano bissetor do diedro de ângulo agudo formado pelos planos α_1: $3x - 2y + 6z - 7 = 0$ e α_2: $3x + 6y - 2z - 9 = 0$.

Resp.: $4y - 4z - 1 = 0$

SUGESTÃO



a) Calcule os planos bissetores:

β_1: $6x + 4y + 4z - 16 = 0$

β_2: $4y - 4z - 1 = 0$

b) Tome um ponto de um dos planos dados.

Seja $P_2 = (3, 0, 0) \in \alpha_2$.

Calcule as distâncias de P_2 aos dois planos bissetores:

$$d(P_2, \beta_1) = \frac{2}{\sqrt{68}} = \frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$d(P_2, \beta_2) = \frac{1}{\sqrt{32}}$$

Das duas distâncias, a $d(P_2, \beta_2)$ é a menor. *Ipso facto*, β_2 é o plano bissetor do ângulo agudo.

05. Achar a equação do plano bissetor do diedro obtuso cujas faces são os planos $2x + 3y - 6z = 9$ e $2x - 6y + 3z = 7$.

Resp.: $4x - 3y - 3z - 16 = 0$

SOFISMAS:

Como Deus é onipotente, Ele pode fazer absolutamente tudo. Mas:

– Poderia modificar o passado?

– Seria capaz de construir uma pedra tão pesada que Ele próprio não pudesse carregar?

– É justo que Ele permita que o justo sofra por ser justo?

O π na era da informática

No século XX, surge a informática. Como se a busca pelo valor do π constituísse uma herança genética bendita, desde os antigos babilônios, adivinhe qual foi um dos primeiros trabalhos realizados pelo legendário computador ENIAC? Sim, em 1949, suas 17.468 válvulas e 30 toneladas de peso calcularam 2 037 casas decimais em apenas 70h. Em 1959, o computador IBM 704 calculou 10.000 casas decimais em apenas 1h e 40min.

Uma experiência notável foi efetivada em 1999 por dois matemáticos japoneses: Takahashi e Kanada. Eles calcularam o π com **206.158.430.000** dígitos. Estes cálculos foram desenvolvidos na Universidade de Tóquio e foi utilizado um supercomputador Hitachi. O tempo gasto foi de 37h21min4s.

O curioso é que os matemáticos japoneses utilizaram dois algoritmos distintos (de Gauss-Legendre e de Borwein). Os dois métodos só apresentaram diferença nos 45 últimos algarismos.

Parecia ser a pá de cal para o cálculo do π. Mas não! Em 2003, o pertinaz Kanada e sua equipe chegaram a **1.241.100.000.000** casas decimais. Único intuito: *marketing* do fabricante de computadores.

Já se definiu a Matemática como uma “Ciência melancólica”. Este modesto texto mostra o quanto ela é pujante, criativa e engenhosa!

Inútil e melancólica foi a notícia dada pela *Gazeta do Povo* (3/10/00): “Em 1995, um japonês recitou de memória 42.000 primeiros dígitos do nº π em apenas 9h”.

Quer uma forma mnemônica para decorar o π com 11 algarismos?

Assim $\pi = 3{,}1415926535...$

A frase a seguir representa um artifício para memorizá-lo: SOU O MEDO E TEMOR CONSTANTE DO MENINO VADIO, BEM VADIO, em que cada palavra encerra um número de letras que coincide com cada algarismo de π.

Você sabia que há o dia internacional dedicado ao π? Adivinhe qual é!? Resposta: 3/14, ou seja, 14 de março.

(Do autor)

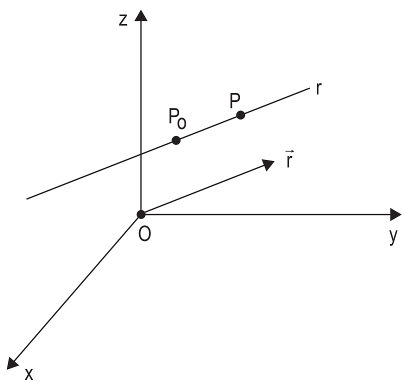
CAPÍTULO 8

A RETA NO E^3

1. EQUAÇÕES DA RETA

Qualquer representação cartesiana de uma reta no espaço tridimensional se faz com pelo menos duas equações.

Equações paramétricas da reta



Seja r uma reta passante por $P_O = (x_O, y_O, z_O)$ e paralela ao não nulo vetor $\vec{r} = \ell\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}$.

O vetor r é denominado **vetor diretor** da reta r.

Um ponto P = (x, y, z) pertence à reta r se, e somente se, os vetores $(P - P_O)$ e $\vec{r}$ forem paralelos:

$$(P - P_O) = t\vec{r} \quad (t \in R)$$

ou

$$P = P_O + t\vec{r} \quad (1)$$

Esta é a equação **vetorial paramétrica** da reta r no E^3 (t é chamado parâmetro).

Introduzindo as coordenadas de P, P_O e $\vec{r}$ em (1), obtém-se:

$$\begin{aligned} x &= x_O + \ell t \\ y &= y_O + mt \\ z &= z_O + nt \end{aligned}$$

cognominadas **equações paramétricas** da reta.

Equações simétricas da reta

Isolando-se o parâmetro t em cada uma das equações paramétricas e igualando as expressões, obtém-se:

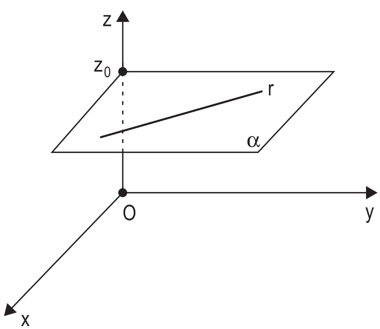
$$\frac{x - x_O}{\ell} = \frac{y - y_O}{m} = \frac{z - z_O}{n} \quad (= t)$$

que são denominadas **equações simétricas** da reta r.

Casos particulares das equações simétricas:

CONVENÇÃO: A nulidade de um denominador implica na nulidade do correspondente numerador.

I) Um dos denominadores é nulo.



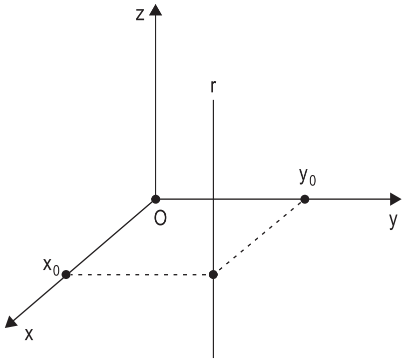
Se, por exemplo,
$n = 0 \Rightarrow z - z_O = 0 \Rightarrow z = z_O$.

Neste caso a reta é paralela ao plano cartesiano xy, pois o seu vetor diretor $\vec{r} = (\ell, m, 0)$ é paralelo a tal plano. Por conseguinte:

$$r = \frac{x - x_O}{\ell} = \frac{y - y_O}{m} = \frac{z - z_O}{0} \qquad \text{ou}$$

$$r : \begin{cases} z = z_O \\ \dfrac{x - x_O}{\ell} = \dfrac{y - y_O}{m} \end{cases} \qquad (\text{onde } \ell \,.\, m \neq 0)$$

II) Dois denominadores são concomitantemente nulos.



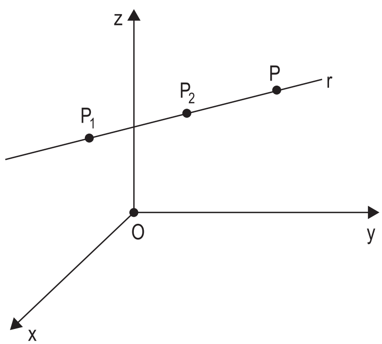
Se, por exemplo,
$\ell = m = 0$ e $n \neq 0$ se infere que a reta é paralela ao eixo das cotas, uma vez que o seu vetor diretor é $\vec{r} = (0, 0, n)$.

Assim:

$$r : \frac{x - x_O}{0} = \frac{y - y_O}{0} = \frac{z - z_O}{n}$$

$$\text{ou} \quad r: \begin{cases} x = x_O \\ y = y_O \\ \dfrac{z - z_O}{n} = t \end{cases}$$

Equações simétricas da reta por dois pontos



Considere a reta r individualizada por dois pontos $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ e seja $P = (x, y, z)$ um ponto genérico de tal reta.

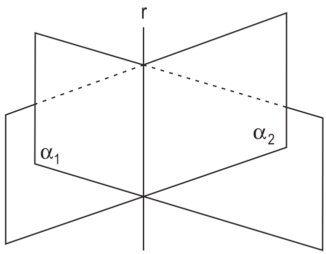
Por conseguinte, a reta r passa pelo ponto P_1 e tem como vetor diretor o vetor $(P_2 - P_1)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

que representam as equações simétricas da reta individualizada pelos pontos P_1 e P_2.

Equações da reta determinada pela interseção de dois planos

Cumpre lembrar o já exposto no capítulo de plano que uma reta no espaço E^3 pode ser determinada pela interseção de dois planos.



$$r : \begin{cases} \alpha_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ \alpha_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

Equações reduzidas da reta

Das equações simétricas de uma reta r

$$\frac{x - x_O}{\ell} = \frac{y - y_O}{m} = \frac{z - z_O}{n}$$

temos duas igualdades independentes entre si:

$$\begin{cases} \dfrac{y - y_O}{m} = \dfrac{x - x_O}{\ell} & (1) \\ \\ \dfrac{z - z_O}{n} = \dfrac{x - x_O}{\ell} & (2) \end{cases}$$

Isolando-se a variável y em (1):

$$y = p_1x + q_1$$

Isolando-se a variável z em (2) :

$$z = p_2x + q_2$$

Destarte, as equações reduzidas de uma reta, com variável independente x, são representadas por:

$$r : \begin{cases} y = p_1x + q_1 \\ z = p_2x + q_2 \end{cases}$$

Geometricamente, a reta $r: \begin{cases} y = p_1x + q_1 \\ z = p_2x + q_2 \end{cases}$ intercepta o plano yz no ponto $P_O = (0, q_1, q_2)$ e $\vec{v} = (1, p_1, p_2)$ é o seu vetor diretor. Ademais, cada uma das equações reduzidas da reta representa um plano e a reta é portanto determinada pela interseção de dois planos, cada um dos quais paralelo a um eixo coordenado.

Dependendo da posição da reta r, poder-se-á usar como variável independente não só o x, como também o y ou então o z.

Exemplo:

Achar as equações reduzidas da reta $r: \frac{x}{2} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z-2}{-2}$

(com variável independente x).

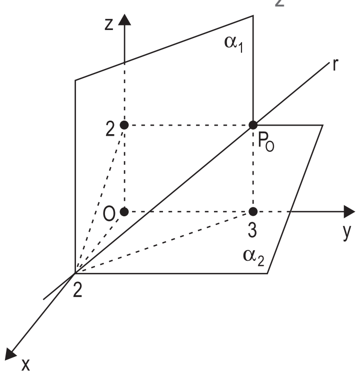
RESOLUÇÃO:

a) $\frac{x}{2} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z-2}{-2} \Rightarrow r: \begin{cases} \frac{y-3}{-3} = \frac{x}{2} & (1) \\ \frac{z-2}{-2} = \frac{x}{2} & (2) \end{cases}$

b) Isolando-se y em (1) e z em (2):

$$r: \begin{cases} y = \frac{-3x}{2} + 3 \\ z = -x + 2 \end{cases} \quad \text{(resposta)}$$

A reta r representada por suas equações reduzidas é fruto da interseção dos planos $\alpha_1: y = \frac{-3x}{2} + 3$ e $\alpha_2: z = -x + 2$



Observe que os planos α_1 e α_2 são paralelos aos eixos z e y respectivamente.

A reta r "fura" o plano yz no ponto $P_O = (0, 3, 2)$ e tem como vetor diretor o $\vec{v} = \left(1, -\frac{3}{2}, -1\right)$

Exercícios

"A Matemática é a única linguagem que temos em comum com a natureza."

Stephen Hawking (n. 1942), doutor em Cambridge, considerado o mais brilhante físico teórico desde Einstein.

01. Achar as equações simétricas da reta que passa pelo ponto A = (1, 3, 0) e é paralela ao vetor $\vec{v} = (3, 4, -1)$.

Resp.: $\frac{x-1}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{-1}$

02. Obter as equações simétricas da reta individualizada pelos pontos A = (1, 3, 2) e B = (5, 2, 2).

Resp.: $\frac{x-1}{4} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-2}{0}$

03. A reta r passa pelo ponto P = (1, 2, 0) e tem a direção do vetor $\vec{v} = 3\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$. Determinar as equações reduzidas de r (com variável independente x).

Resp.: $y = \frac{x+5}{3}$; $z = \frac{-x+1}{3}$

04. Estabelecer as equações reduzidas da reta que passa pelos pontos P = (0, –4, –5) e Q = (1, –2, –2).

Resp.: $y = 2x - 4$; $z = 3x - 5$

05. São dadas as equações paramétricas de

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = -5t \end{cases}$$

Obter as equações simétricas de r.

Resp.: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{-5}$

06. Verificar se os pontos P = (4, 2, 0) e Q = (1, 0, –1) pertencem à reta $r : \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+1}{1}$

Resp.: $P \in r$ e $Q \in r$

07. Determinar o ponto da reta $r : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 + t \\ z = 4 - t \end{cases}$ que tenha ordenada 5.

Pede-se também o vetor diretor de r.

Resp.: P = (7, 5, 0) e $\vec{r} = (1, 1, -1)$

08. O ponto A = (0, x, y) pertence à reta determinada pelos pontos P = (1, 2, 0) e Q = (2, 3, 1). Achar A.

Resp.: A = (0, 1, –1)

09. Complete:

a) A reta $\dfrac{x-1}{0} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z+1}{-1}$ é paralela ao plano:

____

b) A reta $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y+1}{0} = \dfrac{z-2}{0}$ é paralela ao eixo:

____

c) A reta $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-1}{1}$, $z = 2$ é paralela ao plano:

____

d) A reta $r : \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 + 3t \\ z = -3 \end{cases}$ é paralela ao eixo:

____

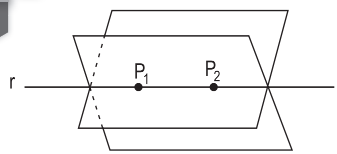
Resp.: a) yz; b) x; c) xy; d) y

01. Dada a reta r como interseção de dois planos, obter a sua equação simétrica.

Dada $\begin{cases} x + y + z - 2 = 0 \\ x + 3y - z - 2 = 0 \end{cases}$

Resp.: $r: \frac{x-2}{-2} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-0}{1}$

SUGESTÃO



Obtenha dois pontos P_1 e P_2 de r:

1) fazendo por exemplo y = 0 em r, resulta o sistema:

$$\begin{cases} x + z - 2 = 0 \\ x - z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2 \Rightarrow z = 0 \Rightarrow P_1 = (2,0,0)$$

2) fazendo por exemplo y = 1 em r, resulta o sistema:

$$\begin{cases} x + z - 1 = 0 \\ x - z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow z = 1 \Rightarrow P_2 = (0,\ 1,\ 1)$$

3) $r: \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$

N.B.: Cumpre destacar que para o subtraendo de cada membro do numerador da resposta $\left(r: \frac{x-2}{-2} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-0}{1} \right)$ adotou-se o ponto $P_1 = (2, 0, 0)$. No entanto, poder-se-ia adotar o ponto $P_2 = (0,\ 1,\ 1)$ $\left(r: \frac{x-0}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1} \right)$ ou qualquer outro ponto da reta r.

02. Pede-se a equação simétrica de $s: \begin{cases} x - 2y + z + 3 = 0 \\ 4x + y - 5z + 3 = 0 \end{cases}$

Resp.: $s: \frac{x-0}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{1}$

03. Equação do plano que contém a reta r e o ponto A. Dados:

$A = (1, 0, 2)$ e $r: x - 1 = y + 3 = z$.

Resp.: $x + 2y - 3z + 5 = 0$

SUGESTÃO

1) Equação de r como interseção de 2 planos

$$r : \begin{cases} \alpha_1 : x - z - 1 = 0 \\ \alpha_2 : y - z + 3 = 0 \end{cases}$$

2) Equação do feixe de planos que $\supset$ r

$\alpha_1 + \lambda\alpha_2 = 0$ ①

3) $A \in$ ①

04. Obter a equação do plano determinado pelo ponto

$A = (0, 1, 1)$ e pela reta $r : \begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ x + 2z - 1 = 0 \end{cases}$

Resp.: $3x + y + 4z - 5 = 0$

05. Achar a equação do plano α e que concomitantemente:

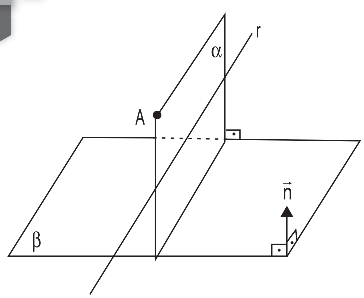
a) passe pelo ponto $A = (0, 1, 2)$;

b) seja paralelo a $r : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{0} = \dfrac{z+1}{1}$

c) seja perpendicular ao plano β: $2x + y - z + 2 = 0$.

Resp.: $x - 4y - 2z + 8 = 0$

SUGESTÃO



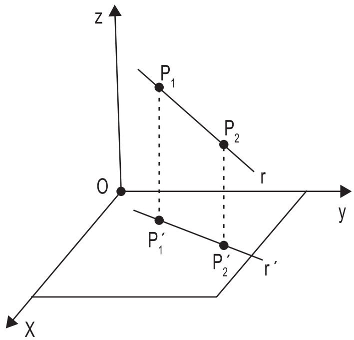
A figura mostra que o plano α contém o ponto $A = (0, 1, 2)$ e é paralelo aos vetores $\vec{r} = (2, 0, 1)$ e $\vec{n} = (2, 1, -1)$. Então:

$$\alpha : \begin{vmatrix} x & y-1 & z-2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

01. Encontrar a projeção ortogonal da reta r: x = y – 1 = z – 2 sobre o plano coordenado xy.

Resp.: $r' : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{0}$

SUGESTÃO



Sejam $P_1 = (0, 1, 2)$ e $P_2 = (1, 2, 3)$ pontos da reta r, e $P_1' = (0, 1, 0)$ e $P_2' = (1, 2, 0)$ as respectivas projeções ortogonais sobre o plano xy.

Série B

"Qualquer professor, que possa ser substituído por um computador deve ser substituído."

Arthur Clarke (1917-2008), escritor inglês e autor de "2001 - Uma odisseia no espaço"

02. Calcule as medidas dos ângulos que a reta $r : \frac{x-5}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{6}$ forma com os eixos coordenados.

Resp.: $\cos\alpha = \frac{2}{7}$ $(\alpha \cong 73^o)$;

$\cos\beta = \frac{3}{7}$ $(\beta \cong 65^o)$ e

$\cos\gamma = \frac{6}{7}$ $(\gamma \cong 31^o)$

SUGESTÃO

Calcule os cossenos diretores do vetor $\vec{r} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k}$.

Por exemplo: $\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{2}{\sqrt{4 + 9 + 36}} = \frac{2}{7}$

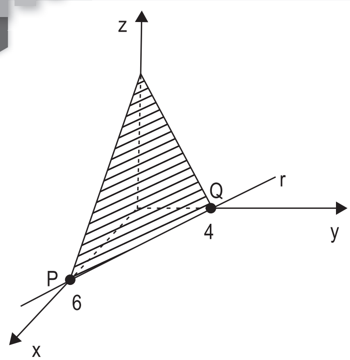
03. A reta r passa pelo ponto A = (1, –2, –3) e forma com os eixos x, y e z, respectivamente, ângulos de 60°, 90° e 30°.

Resp.: $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{0} = \frac{z+3}{\sqrt{3}}$

04. Achar a reta r obtida pela interseção do plano α: $2x + 3y + 4z - 12 = 0$ com o plano xy.

Resp.: $\frac{x-6}{-6} = \frac{y}{4} = \frac{z}{0}$

SUGESTÃO



1) Equação segmentária de α:

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{4} + \frac{z}{3} = 1$$

2) Cálculo dos pontos P e Q:

P = (6, 0, 0) e Q = (0, 4, 0)

3) Obter a reta PQ.

05. Equação do plano que contém o ponto A = (2, 1, 3) e é paralelo às retas:

$$r: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + 3t \\ z = 2 \end{cases} \quad \text{e} \quad s: \begin{cases} x = 2z - 1 \\ y = z + 3 \end{cases}$$

Resp.: $3x - y - 5z + 10 = 0$

06. Num cubo são conhecidos 4 de seus vértices: $P_1 = (2, 2, 0)$, $P_2 = (2, 4, 0)$, $P_3 = (0, 4, 0)$ e $P_4 = (2, 2, 2)$. Determine os pontos onde a reta

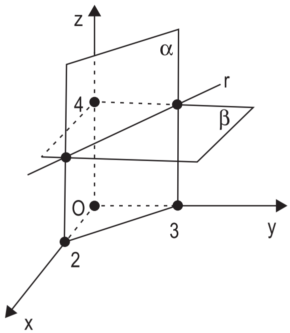
$r: \frac{x-1}{0} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-2}{-1}$ "fura" o cubo.

Resp.: P = (1, 2, 2) e P' = (1, 4, 1)

07. Achar o ponto P em que a reta $r_1 = \begin{cases} 2x + y + z - 3 = 0 \\ x + y - 2z - 1 = 0 \end{cases}$ intercepta o plano coordenado xy.

Resp.: $P = (2, -1, 0)$

08. Dada a figura abaixo, onde o plano α é paralelo ao eixo z e o plano β é paralelo ao plano xy. A reta r é a interseção de α e β. Pede-se:



a) equações simétricas de r;

b) equação do feixe de planos por r.

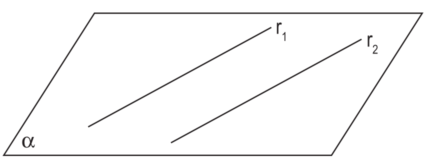
Resp.: a) $r: \dfrac{x-2}{-2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z-4}{0}$

b) $3x + 2y - 6 + \lambda(z - 4) = 0$
ou $z - 4 + \lambda(3x + 2y - 6) = 0$

2. POSIÇÕES RELATIVAS DE DUAS RETAS

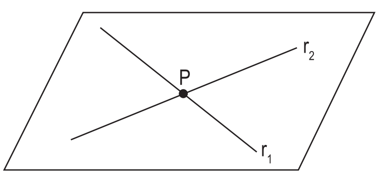
No espaço E^3, duas reta r_1 e r_2 podem ser:

Coplanares e paralelas



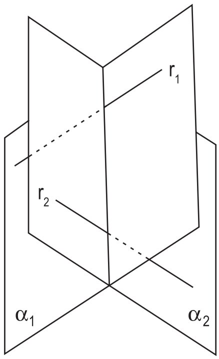
As retas r_1 e r_2 jazem no mesmo plano α e têm a mesma direção. Como caso particular as retas r_1 e r_2 podem ser coincidentes.

Coplanares e concorrentes



As retas r_1 e r_2 estão contidas no mesmo plano α e se interceptam num ponto P. As coordenadas de P = (x, y, z) satisfazem o sistema formado por r_1 e r_2.

Reversas



As retas r_1 e r_2 pertencem a planos distintos e não têm ponto (próprio ou impróprio) em comum.

3. CONDIÇÕES DE PARALELISMO E ORTOGONALIDADE DE DUAS RETAS

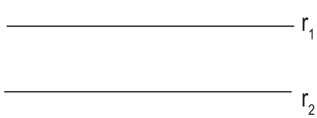
Conhecendo-se as retas r_1 e r_2 por suas equações simétricas:

$$r_1 = \frac{x - x_1}{\ell_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}$$

$$r_2 = \frac{x - x_2}{\ell_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}$$

Condição de paralelismo

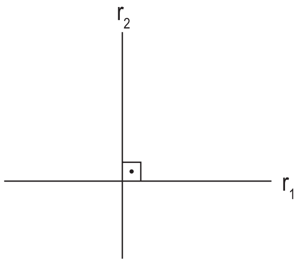
A reta r_1 tem a direção do vetor $\vec{r_1} = \ell_1\vec{i} + m_1\vec{j} + n_1\vec{k}$. Por sua vez, a reta r_2 tem a direção do vetor $\vec{r_2} = \ell_2\vec{i} + m_2\vec{j} + n_2\vec{k}$. A condição para que as retas r_1 e r_2 sejam paralelas é que seus vetores diretores o sejam:



$$\frac{\ell_1}{\ell_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

Condição de ortogonalidade

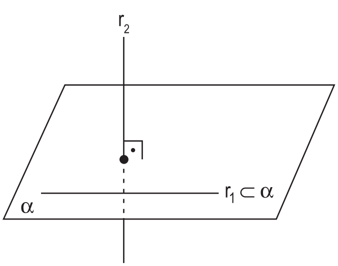
A condição de ortogonalidade entre as retas r_1 e r_2, coincide com a dos vetores $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$:



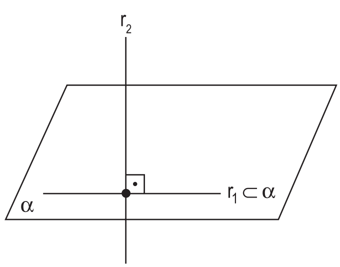
$$\ell_1\ell_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0$$

N.B.: Autores há que estabelecem uma acepção diferente no que tange a retas perpendiculares e retas ortogonais:

- duas retas r_1 e r_2 são ortogonais se formarem entre si um ângulo reto;
- duas retas r e s são perpendiculares se além de formarem um ângulo reto forem concorrentes.



(r_1 e r_2 são ortogonais)



(r_1 e r_2 são perpendiculares)

Exercícios

> "Pessoas que são boas em arranjar desculpas raramente são boas em qualquer outra coisa."
>
> *Benjamin Franklin (1706-1790), político, físico e filósofo americano.*

01. Equação da reta que passa por P = (1, 2, 0) e é paralela à reta

$$r: \frac{x+2}{3} = \frac{y}{0} = \frac{z-1}{2}$$

Resp.: $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{0} = \frac{z}{2}$

02. Provar que as retas $r: \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$ e $s: \begin{cases} 2x + 2y + 1 = 0 \\ 3x - 3y + 6z + 1 = 0 \end{cases}$ são paralelas.

SUGESTÃO

Obter as equações simétricas de r e s e verificar que

$$\frac{\ell_1}{\ell_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

03. Determinar as equações simétricas da reta r sabendo-se que passa pelo ponto P = (3, 5, 2) e é concomitantemente ortogonal ao eixo x e à reta $s: \frac{x-1}{0} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+1}{1}$

Resp.: $x = 3,\ \frac{y-5}{1} = \frac{z-2}{2}$

SUGESTÃO

1) A reta r tem a forma: $\frac{x-3}{0} = \frac{y-5}{m} = \frac{z-2}{n}$

2) Imponha a condição de ortogonalidade entre r e s.

04. Calcular k para que as retas r e s sejam ortogonais.

Dadas:

$$r:\begin{cases} y = kx + 2 \\ z = -3x \end{cases} \quad \text{e} \quad s:\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - t \\ z = 2t \end{cases}$$

Resp.: $k = -3$

4. CONDIÇÃO DE COPLANARIDADE DE DUAS RETAS

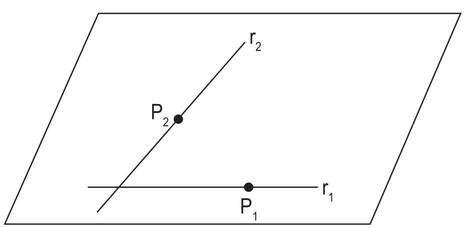
Dadas as retas:

$$r_1 = \frac{x - x_1}{\ell_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}$$

$$r_2 = \frac{x - x_2}{\ell_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}$$

A reta r_1 contém o ponto $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e tem a direção do vetor $\vec{r_1} = \ell_1\vec{i} + m_1\vec{j} + n_1\vec{k}$. A reta r_2 contém o ponto $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ e tem a direção do vetor $\vec{r_2} = \ell_2\vec{i} + m_2\vec{j} + n_2\vec{k}$. As retas r_1 e r_2 serão coplanares se, e somente se, os vetores $(P_2 - P_1)$, $\vec{r_1}$ e $\vec{r_2}$ o forem:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \ell_1 & m_1 & n_1 \\ \ell_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$



Exercícios

"As grandes ideias necessitam de grandes asas para os grandes voos. Mas nunca podem dispensar o trem de pouso."

Umberto Eco (n.1932), escritor italiano

01. Provar que as retas r e s são coplanares. Dadas:

$$r: \frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{0}=\frac{z+2}{1} \quad e \quad s: \frac{x}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+1}{-1}$$

02. Calcular m para que as retas r e s sejam coplanares. Dadas:

$$r: \begin{cases} x = 2-3t \\ y = 1+t \\ z = 2t+3 \end{cases} \quad e \quad s: \begin{cases} y = mx+1 \\ z = -3x \end{cases}$$

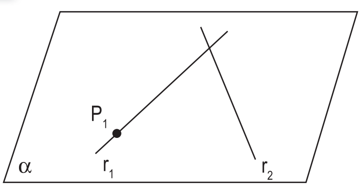
Resp.: $m = \frac{-9}{13}$

03. As retas r_1 e r_2 são coplanares. Achar a equação do plano que as contém. Dadas:

$$r_1: \frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{3} \quad e \quad r_2: \frac{x+5}{4}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{2}$$

Resp.: $7x - 6y - 5z + 23 = 0$

SUGESTÃO



O plano α contém o ponto P_1 e é paralelo aos vetores $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$. Sejam: $P_1 = (2, 2, 5)$ um ponto qualquer de r_1, $\vec{r}_1 = (3, 1, 3)$ e $\vec{r}_2 = (4, 3, 2)$.

Então:

$$\alpha: \begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z-5 \\ 3 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

04. Achar a equação do plano que contém as retas

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{0}=\frac{z+2}{1} \quad \text{e} \quad \frac{x}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+1}{-1}$$

Resp.: $2x - 3y - 4z - 7 = 0$

Série B

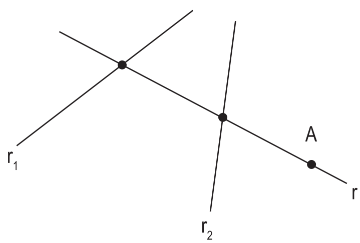
"Sorte nas profissões não existe. O que existe é o encontro da preparação com a oportunidade."

Joseph Straub, consultor norte-americano

05. Obter as equações simétricas da reta r que passa pelo ponto A = (–1, 0, –1) e que intercepta as retas e $r_1 : \begin{cases} y = 3 \\ z = x + 1 \end{cases}$ e $r_2 : \begin{cases} y = x + 2 \\ z = 2 \end{cases}$

Resp.: $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{3}$

SUGESTÃO



1) $r : \frac{x+1}{\ell}=\frac{y-0}{m}=\frac{z+1}{n}$

2) equações simétricas de r_1 e r_2:

$r_1 : \frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{0}=\frac{z}{1}$ e

$r_2 : \frac{x+2}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{0}$

3) condição de coplanaridade entre r e r_1.

4) condição de coplanaridade entre r e r_2.

06. Equações simétricas da reta que passa por P = (1, –1, –2) e que intercepta as retas r e s.

Dadas: $r:\begin{cases} x - z - 3 = 0 \\ 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$ e $s:\begin{cases} 2x - z + 3 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases}$

Resp.: $\dfrac{x-1}{7} = \dfrac{y+1}{6} = \dfrac{z+2}{7}$

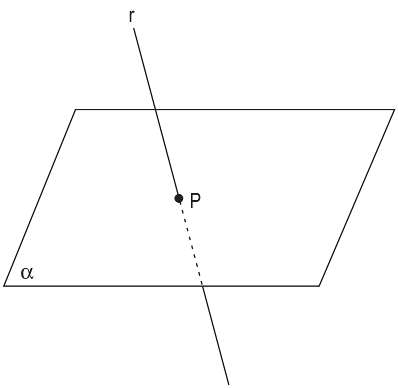
5. INTERSEÇÃO DE RETA E PLANO

Sejam:

α: ax + by + cz + d = 0 ①

$r:\begin{cases} x = x_O + \ell t \\ y = y_O + mt \\ z = z_O + nt \end{cases}$ ②

onde a reta não é paralela ao plano.



Se o ponto P = (x, y, z) é o ponto de interseção da reta com o plano, suas coordenadas devem verificar as equações do sistema formado por ① e ②.

Destarte, substituem-se as equações paramétricas da reta na equação do plano, determinando-se o valor do parâmetro t.

Exemplo:

Calcular o ponto P de interseção da reta

$r: \dfrac{x+3}{1} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z+10}{3}$ (=t) com o plano

α: 3x – 2y + 4z + 12 = 0

RESOLUÇÃO:

a) Equações paramétricas de r:

$$r: \begin{cases} x = -3 + t \\ y = -2 + 2t \\ z = -10 + 3t \end{cases}$$

b) Substituindo as equações paramétricas de r na equação do plano:

$3(-3 + t) - 2(-2 + 2t) + 4(-10 + 3t) + 12 = 0 \Rightarrow t = 3$

c) Levando-se o valor de t = 3 nas equações paramétricas:

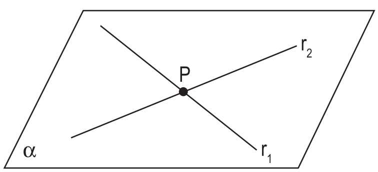
P = (0, 4, –1)

6. INTERSEÇÃO DE DUAS RETAS

Sejam r_1 e r_2 duas retas concorrentes:

$$r_1 = \frac{x - x_1}{\ell_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1} \quad ①$$

$$r_2 = \frac{x - x_2}{\ell_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2} \quad ②$$



Se P = (x, y, z) é o ponto de interseção de r_1 e r_2, as coordenadas deste ponto satisfazem o sistema formado por ① e ② .

Cumpre destacar que o sistema formado por ① e ② é composto de 4 igualdades (4 equações) para três incógnitas x, y e z. A resolução mais acessível do sistema é na maioria esmagadora das vezes balizada na vivência pessoal do aluno.

Exemplo:

Achar o ponto P de interseção das retas

$$r: \frac{x - 2}{3} = \frac{y - 4}{5} = \frac{z}{2} \quad \text{e} \quad s: \frac{x + 1}{2} = \frac{y + 1}{4} = \frac{z + 2}{1}$$

RESOLUÇÃO:

a) Tomemos a primeira igualdade de r e s:

$$\text{Sistema} \begin{cases} \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-4}{5} \\ \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y+1}{4} \end{cases} \Rightarrow x = -1 \Rightarrow y = -1$$

b) Levemos $x = -1$ na equação de r (ou de s) e obteremos $z = -2$.

c) Resposta: $P = (-1, -1, -2)$.

Exercícios

> "Duvidar de tudo ou acreditar em tudo são atitudes preguiçosas. Dispensam-nos de refletir."
>
> *Henri Poincaré (1854-1912), filósofo e matemático francês.*

01. Achar o ponto de interseção da reta r com o plano α. Dados:

$$r: \frac{x+2}{2} = \frac{y+4}{1} = \frac{z-1}{-3} \quad \text{e} \quad \alpha: 3x - 5y + z - 1 = 0$$

Resp.: $P = (12, 3, -20)$

02. Encontrar as coordenadas do ponto de interseção de α: $2x + 3y + 4z - 1 = 0$ com a reta determinada pelos pontos $P_1 = (1, 0, 2)$ e $P_2 = (3, 4, 1)$.

Resp.: $P = \left(-\dfrac{1}{2}, -3, \dfrac{11}{4}\right)$

03. As retas $r: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{0} = \dfrac{z+2}{1}$ e $s: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z+1}{-1}$ se interceptam num ponto P. Achar as coordenadas de P.

Resp.: $P = (1, 1, -2)$

04. Calcular o ponto de interseção das retas

$$r : \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+1}{3} \quad \text{e} \quad s : \frac{x}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-2}$$

Resp.: P = (1, –1, 2)

05. Achar o ponto de interseção de r_1 e r_2. Dadas:

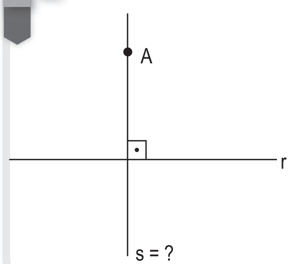
$$r_1 : \begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2 : \begin{cases} y + 1 = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

Resp.: P = (–1, –1, 1)

06. Calcular as equações simétricas da reta s que passa pelo ponto A = (1, –1, 1) e é ortogonal à reta $r : \frac{x-2}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$

Resp.: $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-1}{-2}$

SUGESTÃO



1) Equação de s:

$$s : \frac{x-1}{\ell} = \frac{y+1}{m} = \frac{z-1}{n}$$

2) Condição de ortogonalidade de r e s;

3) Condição de coplanaridade de r e s.

07. A reta r passa por P = (2, –1, 3) e é ortogonal à reta $s : \begin{cases} 2x - 3z + 6 = 0 \\ 2y - 5z + 24 = 0 \end{cases}$
Achar o ponto de interseção de r e s.

Resp.: (3, –2, 4)

Série B

"You are not my first love, but you are my last."
Canção americana

08. Dados o ponto $P_O = (2, -1, 1)$ e a reta $t : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{0} = \dfrac{z}{1}$, obter:

a) a reta r que passa por P_O e intercepta ortogonalmente a reta t;

b) o ponto de interseção de r e t;

c) a distância do ponto P_O à reta t.

Resp.: a) $r : \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+1}{0} = \dfrac{z-1}{-2}$

b) $N = \left(\dfrac{11}{5}, -1, \dfrac{3}{5}\right)$

c) $d(P_O, t) = d(P_O, N) = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

01. Achar o ponto A' simétrico de A = (3, 1, 6) em relação à reta
$r : \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-1}{0} = \dfrac{z-4}{1}$

Resp.: A' = (5, 1, 4)

02. A interseção das retas $r : \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-2}{-2}$ e $s : \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{4} = \dfrac{z-5}{-5}$

é o ponto P_O. Determine a distância do ponto P_O ao plano $\alpha: 2x - y + 2z - 1 = 0$.

Resp.: $\dfrac{5}{3}$

03. Achar as equações simétricas da reta que passa pelo ponto de interseção das retas $r_1 : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 3t \end{cases}$ e $r_2 : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$ e é, ao mesmo tempo, perpendicular a r_1 e r_2.

Resp.: $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+1}{-5} = \dfrac{z}{3}$

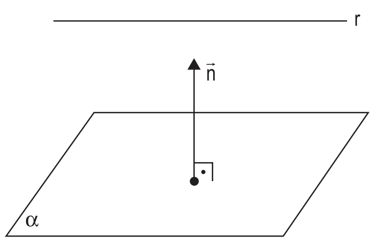
7. CONDIÇÕES DE PARALELISMO E ORTOGONALIDADE DE RETA E PLANO

Sejam

$\alpha : ax + by + cz + d = 0$

$$r : \frac{x - x_O}{\ell} = \frac{y - y_O}{m} = \frac{z - z_O}{n}$$

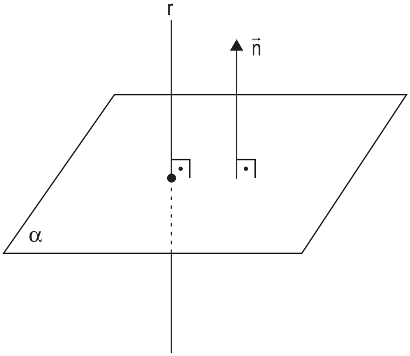
Condição de paralelismo de reta e plano



O vetor $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ é ortogonal ao plano α e $\vec{r} = \ell\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}$ tem a direção da reta r, esta paralela ao plano α. Isto posto, a condição de paralelismo entre a reta r e o plano α se faz com a aplicação da condição de ortogonalidade entre os vetores $\vec{n}$ e $\vec{r}$:

$$a\ell + bm + cn = 0$$

Condição de ortogonalidade de reta e plano



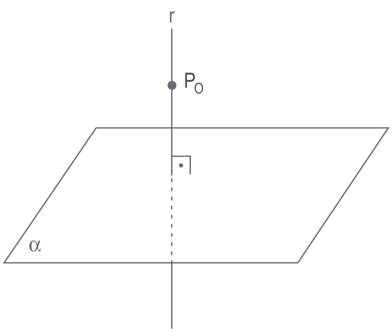
A reta r, sendo ortogonal ao plano α, tem a direção do vetor $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$. Da condição de paralelismo entre dois vetores:

$$\frac{\ell}{a} = \frac{m}{b} = \frac{n}{c}$$

Exemplos:

1) Achar as equações da reta por $P_O = (3, 5, 0)$ e ortogonal ao plano $2x + 4y - z + 1 = 0$.

RESOLUÇÃO:



a) Equação da reta por $P_O = (3, 5, 0)$

$$r: \frac{x-3}{\ell} = \frac{y-5}{m} = \frac{z-0}{n}$$

b) Em face da condição de ortogonalidade de reta e plano:

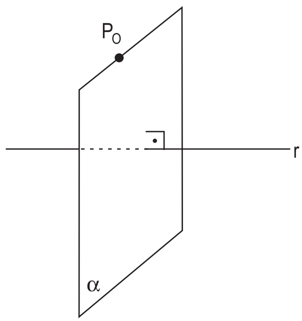
$\ell = a = 2$, $m = b = 4$ e $n = c = -1$

c) Resposta: $r: \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-5}{4} = \dfrac{z}{-1}$

2) Obter a equação do plano por $P_O = (3, 5, 0)$ e ortogonal à reta

$$r: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{4}$$

RESOLUÇÃO:



a) Pela condição de ortogonalidade de reta e plano sabemos que $a = \ell = 1$, $b = m = 2$ e $c = n = 4$. Então
$\alpha: 1x + 2y + 4z + d = 0$

b) Mas $P_0 = (3, 5, 0) \in \alpha$
$1(3) + 2(5) + 4(0) + d = 0$
$d = -13$

c) Resposta:
$\alpha: x + 2y + 4z - 13 = 0$

Exercícios

> "Em tempo de mudanças, os dispostos a aprender sempre são os que herdarão o futuro. Os que acham que já aprenderam tudo, descobrirão estar preparados apenas para viver num mundo que já não mais existe."
>
> *Eric Haffer*

01. Verificar se a reta $r: \frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-1}{1}$ é paralela ao plano $\alpha: 2x - 2z + 3 = 0$.

Resp.: A reta é paralela ao plano.

02. Obter a equação da reta que passa por P = (3, 0, 1) e é ortogonal ao plano α: $3x + 4y + 2 = 0$.

Resp.: $\frac{x-3}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{0}$

03. Determinar a equação do plano ortogonal ao segmento de extremidades P = (0, 3, 2) e Q = (2, 1, 4) em seu ponto médio.

Resp.: $x - y + z - 2 = 0$

04. Achar o ponto P' simétrico de P = (2, 2, –1) em relação plano α: x – z + 3 = 0.

Resp.: P' = (–4, 2, 5)

05. Calcular as equações simétricas da reta que passa pelo ponto A = (1, –2, 5) e é paralela aos planos α_1: x + y + z + 3 = 0 e α_2: x – z + 1 = 0.

Resp.: $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z-5}{1}$

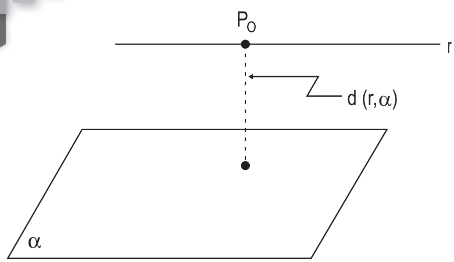
06. Achar as equações simétricas da reta que passa pelo ponto P = (3, 5, –2) e é paralela aos planos x + 2y – z + 3 = 0 e x + 2y + 3z + 4 = 0.

Resp.: $\dfrac{x-3}{-2} = \dfrac{y-5}{1} = \dfrac{z+2}{0}$

07. Determinar a distância da reta r ao plano α, sendo: $r: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-2}{2}$ e α: 4x – y – z + 3 = 0

Resp.: $\sqrt{2}$

SUGESTÃO



Verifique que a reta é paralela ao plano.

Então

$d(r, \alpha) = d(P_O, a)$ onde $P_O = (1, -1, 2)$ é ponto qualquer de r.

08. Obter as equações da reta r tais que:

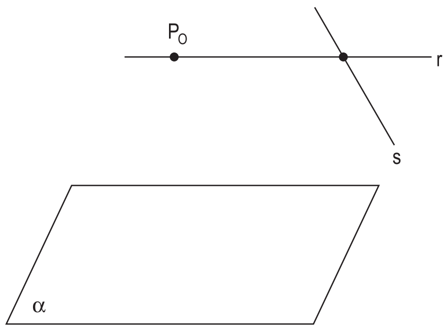
1) passe por $P_O = (-2, -3, 5)$;

2) seja paralela ao plano $\alpha: 2x - z + 3 = 0$;

3) intercepte a reta $s: \begin{cases} x = z - 2 \\ y = 3 \end{cases}$

Resp.: $\frac{x+2}{5} = \frac{y+3}{-6} = \frac{z-5}{10}$

SUGESTÃO



a) $r: \frac{x+2}{\ell} = \frac{y+3}{m} = \frac{z-5}{n}$

b) condição de paralelismo de r e α;

c) condição de coplanaridade de r e s.

Série B

"Quando você contrata pessoas mais inteligentes que você, prova que é mais inteligente que elas."

Richard Hallan Grant, vice-presidente da Chevrolet Motor Company

01. 09. Equação da reta r que passa pelo ponto A = (3, 2, 1), é paralela ao plano α: x + y + z – 2 = 0 e ortogonal à reta s: x = 2y = 3z.

Resp.: $\frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z-1}{3}$

02. Provar que a reta r está contida no plano α.

Dados: $r: \frac{x}{-1} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{2}$ e $\alpha: 4x - 2y + 5z - 5 = 0$

03. O plano α é determinado pelos pontos A = (0, 0, 2), B = (-2, 0, 0) e C = (0, 1, 2).

A reta por $r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -3 + 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$

Sabendo-se paralelos r e α, calcular a distância entre a reta e o plano.

Resp.: $\sqrt{2}$

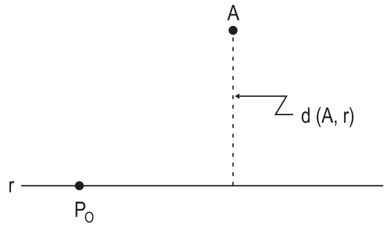
04. Achar a equação do plano que passa pela reta $r: \begin{cases} x + y - z + 3 = 0 \\ 2x + y + 1 = 0 \end{cases}$ e paralelo a reta $s: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{7}$

Resp.: $3x + 2y - z + 4 = 0$

05. Obter as equações simétricas da reta r situada no plano α: 2x + y – z + 1 = 0 e que intercepta ortogonalmente a reta $s: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{3}$

Resp.: $r: \frac{x+3}{5} = \frac{y+8}{-7} = \frac{Z+13}{3}$

8. DISTÂNCIA DE PONTO A UMA RETA



Considere r uma reta passante por $P_O = (x_O, y_O, z_O)$ e que tem a direção do vetor $\vec{r} = \ell\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}$. Em tais condições a reta r tem a forma:

$$r : \frac{x - x_O}{\ell} = \frac{y - y_O}{m} = \frac{z - z_O}{n}$$

Na página 137 demonstrou-se a fórmula que permite calcular a distância de um ponto A à reta r:

$$d(A, r) = |\,(A - P_O) \times \text{vers } \vec{r}\,|$$

Exercícios

> "Se minha Teoria da Relatividade estiver correta, a Alemanha dirá que sou alemão e a França me declarará cidadão do mundo. Mas, se não estiver, a França dirá que sou alemão e os alemães dirão que sou judeu."
>
> *Albert Einstein (1879-1955), Prêmio Nobel de Física em 1921.*

01. Calcular a distância do ponto A = (1, 2, 0) à reta

$$r : \begin{cases} x + y + z - 2 = 0 \\ x + 3y - z - 2 = 0 \end{cases}$$

Resp.: $\dfrac{\sqrt{21}}{3}$

02. Achar a distância do ponto A = (1, 1, 3) à reta determinada pelos pontos P = (4, 3, –2) e Q = (2, 2, 0).

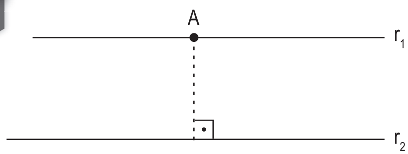
Resp.: $\sqrt{2}$

03. As retas r_1 e r_2 são paralelas. Determinar a distância entre elas.

Dadas: $r_1 : \dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-2}{2}$ e $r_2 : \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{4}$

Resp.: $\dfrac{\sqrt{30}}{3}$

SUGESTÃO



$d(r_1, r_2) = d(A, r_2)$

onde A é o ponto qualquer de r_1.

Série B

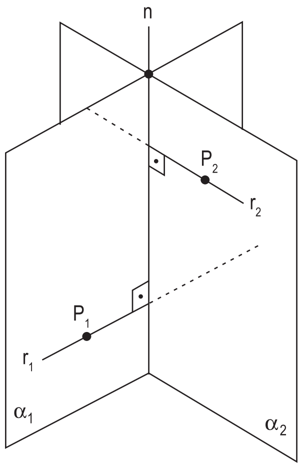
"Na boca de quem não presta, quem é bom não tem valia."

Chico Anysio (1931-2012), humorista, ator, escritor, músico, nascido no Ceará

04. Obter as equações simétricas das retas que passem pelo ponto A = (0, 0, 1), distem $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ da origem do sistema cartesiano e sejam paralelas ao plano $x - y + 2 = 0$.

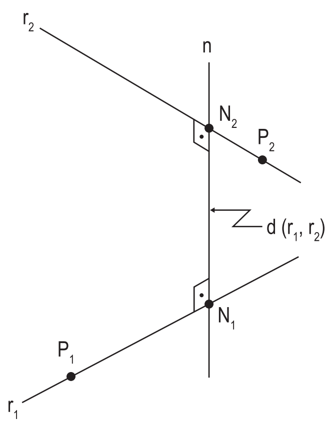
Resp.: $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{\pm\sqrt{2}}$

9. DISTÂNCIA ENTRE DUAS RETAS REVERSAS E EQUAÇÕES DA NORMAL COMUM



A figura ao lado mostra duas retas reversas r_1 e r_2. Pretende-se a fórmula da distância entre elas, bem como o cálculo das equações da normal comum (n).

FÓRMULA DA DISTÂNCIA ENTRE DUAS RETAS REVERSAS



A reta r_1 é passante por $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e é paralela ao vetor $\vec{r}_1 = \ell_1\vec{i} + m_1\vec{j} + n_1\vec{k}$. A reta r_2 contém o ponto $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ e tem a direção do vetor $\vec{r}_2 = \ell_2\vec{i} + m_2\vec{j} + n_2\vec{k}$.

Isto posto:

$$r_1 : \frac{x - x_1}{\ell_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}$$

$$r_2 : \frac{x - x_2}{\ell_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}$$

Deduziu-se na página 140 do presente manual, que a distância $d(r_1, r_2)$ entre as retas reversas r_1 e r_2, estas reversas entre si, é obtida pela fórmula:

$$d(r_1, r_2) = \frac{(P_2 - P_1) \cdot \vec{r}_1 \times \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2|}$$

Equações da normal comum

A reta n, normal comum às retas r_1 e r_2, será individualizada pelas equações da reta que passa pelos pontos N_1 e N_2.

Corroboramos que os pontos N_1 e N_2 são os pés da normal comum às retas r_1 e r_2. A determinação de tais pontos ficou demonstrada à página 140:

$$(N_1 - P_1) = k_1\vec{r}_1 \Rightarrow N_1 = P_1 + k_1\vec{r}_1 \qquad ①$$

$$(N_2 - P_2) = k_2\vec{r}_2 \Rightarrow N_2 = P_2 + k_2\vec{r}_2 \qquad ②$$

Subtraindo membro a membro ① de ② tem-se:

$$(N_2 - N_1) = (P_2 - P_1) + k_2\vec{r}_2 - k_1\vec{r}_1$$

Os valores de k_1 e k_2 são obtidos multiplicando-se escalarmente esta última equação por $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$.

Exercícios

"Nunca na minha vida aprendi fosse o que fosse daqueles que sempre concordaram comigo."

Dudley F. Malone (1882-1950), diplomata americano

01. Dadas as retas

$$r_1 : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{1}$$

$$r_2 : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{2}$$ calcular:

a) a distância entre as retas r_1 e r_2;

b) a reta n, perpendicular comum às retas r_1 e r_2.

Resp.: a) $d(r_1, r_2) = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

b) $n : \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-1}{-1}$

01. Sendo $r_1 : \begin{cases} x + z - 2 = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases}$ e $r_2 : \begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases}$

calcular:

a) a distância entre as retas r_1 e r_2;

b) os pés da normal comum;

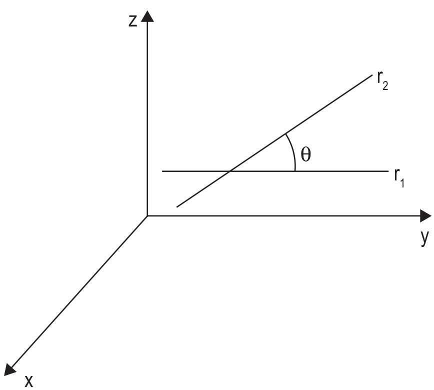
c) a normal comum às retas r_1 e r_2.

Resp.: a) $d(r_1, r_2) = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

b) $N_1 = \left(\dfrac{4}{3}, 1, \dfrac{2}{3}\right); N_2 = \left(\dfrac{5}{3}, \dfrac{1}{3}, 1\right)$

b) $n: \dfrac{x - 4/3}{1} = \dfrac{y - 1}{-2} = \dfrac{z - 2/3}{-1}$

10. ÂNGULO DE DUAS RETAS



Dadas as retas r_1 e r_2 por suas equações simétricas:

$$r_1 : \frac{x - x_1}{\ell_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}$$

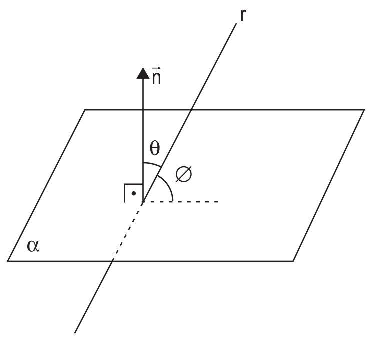
$$r_2 : \frac{x - x_2}{\ell_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}$$

O ângulo θ é o **menor ângulo** formado pelas retas r_1 e r_2.

Obtêmo-lo pela aplicação do produto escalar entre os vetores diretores $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$:

$$\cos\theta = \frac{|\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2|}{|\vec{r}_1||\vec{r}_2|} \qquad \left(0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right)$$

11. ÂNGULO DE UMA RETA COM UM PLANO



Dados:

α: ax + by + cz + d = 0

$$r : \frac{x - x_o}{\ell} = \frac{y - y_o}{m} = \frac{z - z_o}{n}$$

Onde r tem a direção do vetor $\vec{r} = \ell\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}$.

Considere $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ um vetor normal ao plano α.

O ângulo agudo θ entre os vetores $\vec{n}$ e $\vec{r}$ calculado através da definição de produto escalar:

$$\cos\theta = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{r}|}{|\vec{n}||\vec{r}|}$$

Procura-se no entanto, o ângulo Ø (agudo) entre a reta r (que tem a direção do vetor $\vec{r}$) e o plano α. Depreende-se da figura que cos θ = sen Ø, haja vista que os ângulos θ e Ø são complementares.

Face ao exposto:

$$\text{sen}\phi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{r}|}{|\vec{n}||\vec{r}|} \qquad \left(0 \leq \varnothing \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

> "Duas coisas indicam a fraqueza: calar-se quando é preciso falar; e falar quando é preciso calar-se."
>
> *Adágio árabe.*

Exercícios

> "Se não houver frutos, valeu a beleza das flores;
> Se não houver flores, valeu a sombra das folhas;
> Se não houver folhas, valeu a intenção da semente."
> *Henfil (1944-1988), escritor e humorista mineiro.*

01. Achar o ângulo entre as retas

$r: \dfrac{x-1}{7} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z+1}{0}$ e

$s: \dfrac{x+3}{-2} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-1}{-2}$

Resp.: $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ rad.

02. Pede-se o ângulo entre $\alpha: -x + y + 3 = 0$ e $r: \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z+2}{1}$

Resp.: $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ rad.

03. Achar o ângulo que a reta $r: \begin{cases} 2x + 3y - 2z - 1 = 0 \\ 2x + 4y - 3z + 5 = 0 \end{cases}$ forma com o eixo das cotas.

Resp.: $\text{arc} \cos \dfrac{2}{3}$

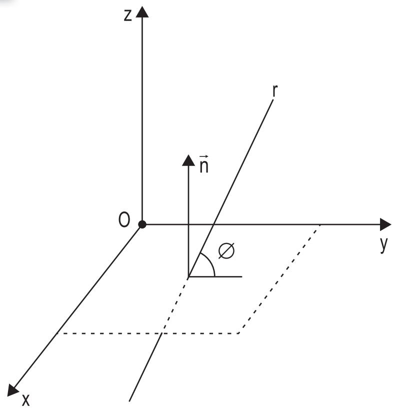
04. Achar as equações simétricas da reta que passe pelo ponto A = (1, 0, 2), seja paralela ao plano $\alpha: x - z + 2 = 0$ e forme um ângulo de $\dfrac{\pi}{6}$ rad. com o plano $\beta: x + y - z + 4 = 0$.

Resp.: $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{\pm\sqrt{6}} = \dfrac{z-2}{1}$

05. Calcule o ângulo agudo que a reta $r: \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z}{6}$ forma com o plano xy.

Resp.: $\varnothing = \text{arc sen} \dfrac{6}{7} \cong 59°$

SUGESTÃO



$$\text{sen } \varnothing = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{r}|}{|\vec{n}||\vec{r}|}$$

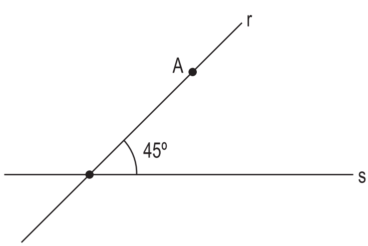
onde $\vec{n} = (0, 0, 1)$ e $\vec{r} = (3, 2, 6)$

Série B

06. Calcular as equações das retas r passantes pelos pontos A = (2, −1, 1) e que interceptam a reta $s : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{0} = \frac{z}{11}$ segundo um ângulo de 45°.

Resp.: $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-1}{3}$ ou $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-1}{-1}$

SUGESTÃO



1) equação de

$$r : \frac{x-2}{\ell} = \frac{y+1}{m} = \frac{z-1}{n}$$

2) condição de coplanaridade de r e s;

3) $\cos 45^\circ = \frac{|\vec{r} \cdot \vec{s}|}{|\vec{r}||\vec{s}|}$

RECR$^{e}_{i}$ANDO

A Matemática em muito ajuda o desenvolvimento do raciocínio. Cada "quebra-cabeça" é um repto ao nosso ego, uma razia à nossa inteligência e não há quem não goste de enfrentá-lo. Existem às centenas, envolvendo ou não a Matemática.

Pode parecer bizarra a inclusão de tal adendo. Justificamos como uma homenagem especial aos nossos alunos de Licenciatura, que poderão futuramente motivar suas aulas, em nível de Ensino Fundamental e Médio. Ademais, cabe ao futuro engenheiro desenvolver o raciocínio, por ser este a principal ferramenta de trabalho.

Já pertencentes ao domínio público, tais recreações foram recriadas, uma vez que possuem redação própria. Em sua maioria esmagadora, nos foram verbalizadas por alunos e amigos e coletados por cerca de três lustros. Respostas na página 233.

I) Assinale a alternativa que corresponde ao 5º símbolo da sequência:



a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

II) Um tijolo pesa 2 quilos mais meio tijolo. Quanto pesa um tijolo e meio?

III) O homem-branco foi feito prisioneiro de uma feroz tribo indígena. O cacique, querendo demonstrar elevado grau de justiça, remeteu a sentença à inteligência do prisioneiro.

Começou o cacique: "Você está numa cela, onde existem duas portas, cada uma vigiada por um guarda. Existe uma porta que dá para a liberdade; e outra, para a morte. Você está livre para escolher a porta que quiser e por ela sair. Poderá fazer uma pergunta - apenas uma - a um dos dois guardas que vigiam as portas. Ah, ia esquecendo: um dos dois guardas responde sempre a verdade; o outro, invariavelmente, responde com uma mentira. Mas você desconhece qual guarda mente, ou qual diz a verdade. Boa sorte!"

O homem-branco pensou bastante. Depois dirigiu-se a um dos guardas e fez uma única pergunta. Só uma. E lampejamente saiu pela porta que dava para a liberdade.

Qual a pergunta que o homem-branco fez ao guarda?

IV) Um grande industrial na necessidade de ir a São Paulo, chegou a seu guarda-noturno e ordenou:

– Amanhã, acorde-me às 6h, por favor. Tenho que apanhar o avião para SP.

– Pois não, chefe!

Pontualmente às 6h o guarda apertou a campainha da residência do industrial e tentou demovê-lo da ideia de viajar:

– Patrão – disse o guarda – estou com mau presságio: sonhei esta noite que o Sr. teria um acidente com o avião e me permita sugerir que não viaje.

O industrial titubeou, mas mesmo assim viajou. Sem incidentes, chegou a SP e por telefone mandou despedir o guarda. Por quê?

V) Coloque a vírgula:

- Levar uma pedra do Rio à Europa uma andorinha não faz verão.
- Um fazendeiro tinha um bezerro e o pai do fazendeiro também era a mãe do bezerro.

VI) Um pai distribuiu um número x de maçãs a seus três filhos, de sorte que:

1) ao filho mais velho coube metade das maçãs mais meia maçã;

2) ao filho do meio, metade das maçãs que sobraram mais meia maçã;

3) ao filho mais moço, metade das maçãs que restaram das duas distribuições anteriores, mais meia maçã;

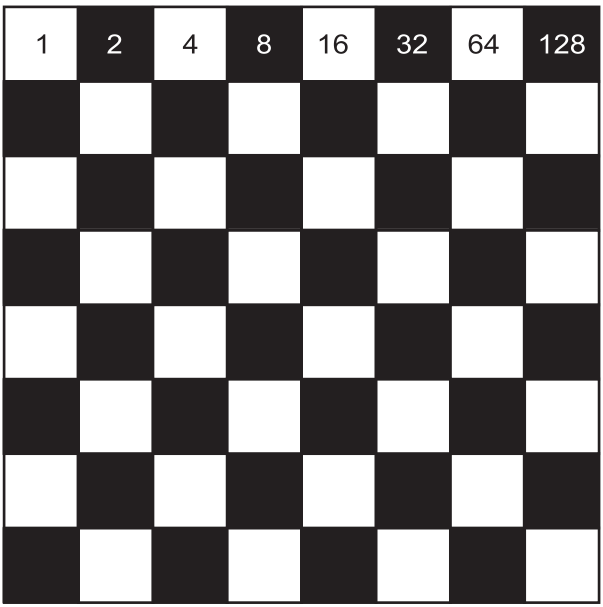
4) ao próprio pai coube uma maçã.

Calcular o número x de maçãs.

VII) Prove que metade de onze é seis.

VIII) Quando o Rei da Pérsia perguntou qual a recompensa que desejava, o inventor do jogo de xadrez pediu um grão de trigo para o primeiro quadrado do tabuleiro, dois para o segundo, quatro para o terceiro, oito para o quarto, e assim por diante, dobrando a quantidade para cada quadrado subsequente. Calcular o número total de grãos correspondentes aos 64 quadrados do tabuleiro.

TABULEIRO DE XADREZ



IX) Um relógio de parede dá uma badalada à uma hora, duas badaladas às duas horas, três badaladas às três horas e assim por diante. Que horas são quando ele está dando a sua 42ª badalada do dia?

X) A torneira A enche um tanque em 3 horas, e a torneira B, em 4 horas. Um sifão esvazia o tanque em 6 horas. Funcionando os três juntos, e o tanque estando vazio, qual o tempo para enchê-lo?

XI) Aponte o erro nas operações abaixo:

Seja $a = b$

1) multiplicando os dois membros por a:

$a^2 = ab$

2) subtraindo b^2 de ambos os membros:

$a^2 - b^2 = ab - b^2$

ou

$(a + b)(a - b) = b(a - b)$

3) dividindo ambos os membros por $(a - b)$:

$a + b = b$

4) mas $a = b$

$b + b = b$

$2b = b$

5) dividindo os dois membros por b:

$2 = 1$

XII) Dois pastores: A e B.

A diz para B: "Dê-me um de seus carneiros que ficamos com igual número". B diz para A: "Não, dê-me um de seus carneiros que ficarei com o dobro dos seus". Quantos carneiros tem A e quantos tem B?

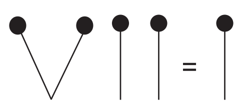
XIII) Empregando apenas o algarismo 9, escrever:

a) 10

b) 100

c) 1000

XIV) Movendo apenas um palito do fósforo, torne verdadeira a igualdade abaixo:



XV) Três irmãos A, B e C receberam de herança 17 camelos. Na partilha, caberia a A metade da cáfila, a B uma terça parte, e C herdaria uma nona parte. Como 17 não é múltiplo de 2, de 3 e de 9, não houve consenso entre os três irmãos. Procuraram a via judicial.

O Juiz juntou ao espólio um de seus camelos, perfazendo um total de 18 camelos e arguiu:

– Cabe a A metade de 17, ou seja 8,5 camelos. Com a inclusão do meu camelo, metade de 18 é 9.

– Cabe a B uma terça parte de 17, ou seja, 5,66 camelos. Tomo 18 e divido por 3, e assim B leva 6.

– Cabe a C uma nona parte de 17, ou seja, 1,88. Tomo 18 e divido por 9 e a C cabe 2.

Os três irmãos anuíram e a sentença foi proferida. Cumpre esclarecer que 9 + 6 + 2 = 17 e o juiz pôde reaver o seu camelo.

Explique o sofisma.

OBSERVAÇÃO

Numa redação mais primorosa e elegante, você encontra o problema dos camelos - porém para 34 - no livro *O Homem que Calculava*, de Malba Tahan.

XVI) Uma lesma deve subir um poste de 10 m de altura. De dia sobe 2 m e à noite desce 1 m. Em quantos dias atingirá o topo do poste?

XVII) Existem nove bolas de marfim e uma delas por ser falsa tem peso menor. Dispondo de uma balança que em cada prato cabem no máximo três bolas, pede-se o número mínimo de pesagens para se descobrir a bola falsa.

XVIII) O velho pai em seu leito de morte chamou seus dois filhos e murmurou: "Como vocês sabem, tenho uma grande extensão de terra e não pretendo dividi-la. Pô-los-ei a uma prova: cada um de vocês apanhe um cavalo e o dono do último cavalo que chegar à cidade de Meca ficará sozinho com a herança".

O velho pai morreu e o filho F_1 tomou o cavalo C_1 e o filho F_2 tomou o cavalo C_2. Naturalmente passaram-se anos e nem a F_1 e nem a F_2 interessava chegar primeiro a Meca.

Em busca de uma solução, procuraram um juiz. Este lhes deu uma sugestão, sem contrariar a proposição do velho pai e os dois saíram em disparada, cada um querendo chegar primeiro que o outro a Meca.

Qual a sugestão do juiz?

XIX) Calcular o valor de x na equação:

$$a = \sqrt{\frac{ax + ate}{mo}}$$

XX) Três gatos comem três ratos em três minutos. Cem gatos comem cem ratos em quantos minutos?

XXI) O pai do padre é filho de meu pai. O que eu sou do padre?

XXII) Qual o dobro da metade de dois?

XXIII) Numa lagoa, há dois patos na frente de dois patos, dois patos no meio de dois patos e dois patos atrás de dois patos. Quantos patos há na lagoa?

XXIV) Depois de n dias uma pessoa observa que:

1) choveu 7 vezes, de manhã ou à tarde;

2) quando chove de manhã não chove à tarde;

3) houve 5 tardes sem chuva;

4) houve 6 manhãs sem chuva.

Calcular n.

OBSERVAÇÃO

Questão de concurso para engenheiro de Petrobras.

XXV) O valor de $\frac{\infty}{2}$ é:

XXVI) Se um bezerro pesa 75 kg mais meio bezerro, quanto pesa um bezerro inteiro?

XXVII) Decifre:

1 000		1 000
	nós K nós você tem	
1 000		1 000

XXVIII) Um avião lotado de passageiros parte do Rio de Janeiro em direção a Buenos Aires. Por uma fatalidade cai na fronteira Brasil-Argentina. Onde serão enterrados os sobreviventes?

XXIX) Uma pata nascida no Chile bota um ovo na divisa Brasil-Chile. Segundo o Itamaraty, a quem pertence o ovo?

XXX) "Quem é aquele moço?" – pergunta Regina. Débora responde:

– "O pai dele é irmão da esposa de meu cunhado".

Qual o grau de parentesco entre o moço e Débora?

XXXI) O π é um número irracional e para 8 casas decimais tem o valor:

$\pi = 3{,}14159265$

A frase abaixo, representa um artifício para memorizá-lo:

SOU O MEDO E TEMOR CONSTANTE DO MENINO VADIO.

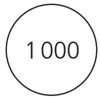
Onde cada palavra encerra um número de letras que coincide em ordem com cada algarismo do π.

XXXII) Teste a sua intuição: uma moeda é envolta, bem ajustada, em todo o seu perímetro por um barbante. O mesmo se faz com a Terra (considere-a esférica) à altura do Equador. Acrescentando 1 m ao comprimento dos barbantes em ambos os casos resulta uma "folga". Qual "folga" é maior: entre o barbante e a moeda ou entre o barbante e a Terra? Qual dos dois casos permite a passagem de uma ratazana?

OBSERVAÇÃO

Este problema é encontrado no livro *Geometria Analítica*, de Boulos e Camargo.

XXXIII) De posse de um lápis e de uma folha de papel em branco, escrever o número 1000 dentro de um círculo fechado, com a condição de não se levantar o lápis do papel. Assim:



XXXIV) Um matemático ao contar a história dos 3 porquinhos a seu filho de 5 anos, começou: "Seja F uma floresta onde há 3 porquinhos: P_1, P_2 e P_3. Admitindo $P_1 > P_2 > P_3$..."

XXXV) Eis aqui um belo texto por demais conhecido. A autoria é desconhecida. Transcrevemo-lo com alguns acréscimos e alterações.

A TRAGÉDIA DA MATEMÁTICA

Num certo livro de Matemática, um quociente apaixonou-se por uma incógnita. Ele, o quociente, é produto da notável família dos polinômios. Ela, uma simples incógnita, resultante de um ente geométrico com uma equação literal.

Oh! Que tremenda desigualdade. Mas como todos sabem, o amor não tem limites e vai do menos infinito ao mais infinito.

Apaixonado, o quociente a olhou do ápice à base, sob todos os ângulos, agudos e obtusos. Era linda, figura ímpar, com traços que a punham em evidência: olhar romboide, boca elíptica, seios esferoides num corpo cilíndrico de linhas senoidais.

– Quem és? – perguntou o quociente com olhar radical.

– Sou a raiz quadrada da soma do quadrado dos catetos. Mas pode me chamar de Hipotenusa – respondeu ela com uma expressão algébrica de quem ama.

Ele fez de sua vida uma paralela à dela, até que se encontraram no infinito. E se amaram ao quadrado da velocidade da luz, traçando ao sabor do momento e da paixão, retas e curvas nos jardins da terceira dimensão.

Ele a amava e a recíproca era verdadeira. Adoravam-se na mesma razão e proporção, no intervalo aberto da vida.

Três quadrantes depois, resolveram se casar. Traçaram planos para o futuro e todos lhes desejaram felicidade integral. Os padrinhos foram o vetor e a bissetriz.

Tudo estava nos eixos. O amor crescia em progressão geométrica: como o marido era uma potência, Hipotenusa foi fecundada quando estava em suas

coordenadas positivas. Tiveram um par: o menino, em homenagem ao padrinho, chamaram de versor; a menina, uma linda abscissa. Nasceram de uma operação cartesiana.

Foram felizes até que, um dia, tudo se tornou uma constante. Foi aí que surgiu um outro. Sim, um outro. O Máximo Divisor Comum, um frequentador de círculos concêntricos viciosos. O mínimo que o Máximo ofereceu foi uma grandeza absoluta. Ela sentiu-se imprópria, mas amava o Máximo. Sabedor deste triângulo amoroso, o quociente chamou-a de ordinária.

Sentindo-se um denominador, resolveu aplicar a solução trivial: um ponto de descontinuidade na vida deles. E quando os dois amantes estavam em colóquio, ele em termos menores e ela de combinação linear, chegou o quociente e, num giro determinante, disparou o seu 45.

Ela passou para o espaço imaginário e o quociente foi parar num intervalo fechado, onde a luz solar se via através de pequenas malhas quadráticas.

XXXVI) Um matemático, chamado Roberto, tinha três filhos:

1) Zero-berto

2) Um-berto

3) Dois-berto

XXXVII) Um trem parte de uma cidade A a 110 km/h e, ao mesmo tempo, um outro parte da cidade B a 90 km/h. Encontram-se numa cidade C. Qual dos dois trens está mais próximo da cidade B?

XXXVIII) Um barqueiro, estando na margem A de um rio, tem que atravessar para a margem B um coelho, uma onça e uma caixa de cenouras. Como seu barco é muito pequeno, ele só pode atravessar um de cada vez. Para que a onça não coma o coelho e o coelho não coma a cenoura, em que sequência o barqueiro deve proceder a travessia?

RESPOSTAS

I) Resposta: d.

Divida cada símbolo por uma reta vertical. Assim:



→ tem-se à direita da reta o algarismo 1 e à esquerda o algarismo 1 invertido.

→ tem-se à direita da reta o algarismo 2 e à esquerda o algarismo 2 invertido.

O 3.º símbolo corresponde ao algarismo 3, o 4.º símbolo ao 4 e a resposta ao 5.

II) Resp.: 6 kg.

É só resolver a equação:

peso do tijolo = x

$$x = 2 + \frac{1}{2}x \rightarrow x = 4$$

Então, um tijolo e meio pesa 6 kg.

III) O homem-branco perguntou a um dos guardas: "Segundo o outro guarda, qual a porta que dá para a liberdade?" E saiu pela porta oposta.

Justificativa:

1) O homem-branco formula a pergunta ao guarda que sempre diz a verdade. Este, sabendo que o outro guarda mente, indicará a porta que leva à morte.
2) O homem-branco formula a pergunta ao guarda que sempre mente. Este, por ser mentiroso, dirá que o outro guarda apontará a porta que leva à morte.

IV) Se era guarda-noturno não podia ter sonhado (dormido) à noite.

V) *... uma andorinha não faz, verão.

OBSERVAÇÃO

Verão não é substantivo e sim verbo (verão vocês).

* um fazendeiro tinha um bezerro e o pai, do fazendeiro também era a mãe do bezerro.

VI) 15 maçãs.

Resolução:

1) ao mais velho: $\frac{x}{2} + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{2}$

2) ao filho do meio: $\frac{x - \frac{x+1}{2}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{4}$

3) ao mais moço: $\frac{x - \frac{x+1}{2} - \frac{x+1}{4}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{8}$

4) ao pai: 1

Equação:

$$\frac{x+1}{2} + \frac{x+1}{4} + \frac{x+1}{8} + 1 = x$$

que resolvida, nos conduz a x = 15.

VII) Em algarismos romanos, represente o XI. Horizontalmente, divida-o ao meio. Assim:

~~XI~~ = VI

VIII) A sequência (1, 2, 4, 8, 16, 32 ...) constitui uma PG limitada, onde: $a_1 = 1$, q = 2 e n = 64 e pede-se a soma de seus 64 termos.

a) Cálculo de a_{64}

$a_n = a_1 q^{n-1}$

$a_{64} = a_1 q^{63} = 1\,(2)^{63} = 2^{63}$

b) Cálculo de S^{64}

$$s_n = \frac{a_n q - a_1}{q - 1}$$

$$s_{64} = \frac{2^{63} \,.\, 2 - 1}{2 - 1} = 2^{64} - 1$$

Resp.: $2^{64} - 1$ grãos de trigo.

OBSERVAÇÃO

Segundo Malba Tahan, o celeiro que satisfaz essa condição é, por exemplo, aquele que tem 4 m de altura, 10 m de largura e 300.000.000 km de comprimento, ou quase o dobro de distância que separa a Terra do Sol.

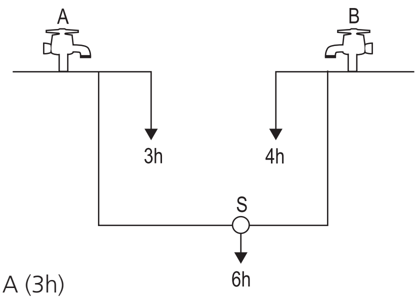
A quantidade de trigo, cujo número de grãos corresponde à expressão $2^{64} - 1$, cobriria toda a superfície da Terra com uma camada de trigo de 2 cm de altura!...

IX) 9 horas.

X) 2 horas e 24 min.

Resolução:

Empregue a fórmula:



$$\frac{1}{t} = \frac{1}{t_A} + \frac{1}{t_B} - \frac{1}{t_S}$$

onde:

t → tempo procurado

t_A → tempo da torneira A (3h)

t_B → tempo da torneira B (4h)

t_S → tempo do sifão S (6h)

Resp.: t = 2,4h = 2 horas e 24 minutos.

XI) Observe no item 3 que a – b = 0, e matematicamente não se pode dividir por zero.

XII) 5 e 7.

Resolução:
número de carneiros de A = x
número de carneiros de B = y
$x + 1 = y - 1$
$y + 1 = 2(x - 1)$
Resolvendo o sistema tem-se: x = 5 e y = 7.

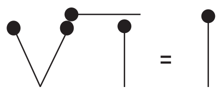
XIII)

a) $9 + \frac{9}{9} = 10$

b) $99 + \frac{9}{9} = 100$

c) $999 + \frac{9}{9} = 1000$

XIV)



XV) Basta observar que o número de camelos que em tese caberia à soma (A+B+C) não é 17 e sim $\frac{17}{2} + \frac{17}{3} + \frac{17}{9} = 9{,}5 + 5{,}66 + 1{,}88 + 16{,}04$

A diferença entre 17 e 16,04 é 0,96, que ficou assim distribuído:

– a favor de A: 9 – 8,5 = 0,5

– a favor de B: 6 – 5,66 = 0,34

– a favor de C: 2 – 1,88 = 0,12

A soma das diferenças: 0,5 + 0,34 + 0,12 perfaz 0,96.

XVI) 9 dias. No nono dia a lesma sobe 2 m, atinge o topo e evidentemente não desce 1 m.

XVII) Apenas 2 pesagens.

XVIII) Atente para a proposição do velho pai: "o dono do último cavalo que chegar a Meca..." O Juiz simplesmente sugeriu que trocassem de cavalos. Assim, F_1 montou em C_2 e disparou em direção a Meca, pois, se chegasse em primeiro, seu cavalo C_1 chegaria em último. Por sua vez F_2 montou em C_1 e também disparou em direção a Meca, para que seu cavalo C_2 chegasse em último.

XIX) x = a.mo - te. Algebricamente, explicite o x:

$$a^2 = \frac{ax + ate}{mo} \Rightarrow a^2 = \frac{a(x + te)}{mo} \Rightarrow a = \frac{x + te}{mo}$$
$$\Rightarrow a \ . \ mo = x + te \Rightarrow x = a \ . \ mo - te$$

XX) 3 minutos.

XXI) Tio.

XXII) Dois.

XXIII) 4 patos. Entenda pela figura:



XXIV) Resp.: 9.

Resolução:

manhãs chuvosas + tardes chuvosas = dias chuvosos

$$(n - 6) \quad + \quad (n - 5) \quad = \quad 7$$

Resolvendo a equação (n – 6) + (n – 5) = 7 tem-se n = 9.

XXV)

$$\frac{\infty}{2} = 4$$

OBSERVAÇÃO

Oito "deitado" dividido por dois, resulta quatro "deitado".

XXVI) 150 kg

Resolução:

peso do bezerro = x

então: $x = 75 + \frac{x}{2} \Rightarrow x = 150$

XXVII) Cá entre nós, você tem mil en/cantos.

XXVIII) Sobrevivente não se enterra!

XXIX) O Brasil não faz divisa com o Chile.

XXX) O moço é sobrinho de Débora.

XXXI) x - x - x

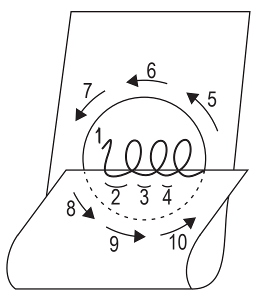
XXXII) A folga é a mesma (16 cm). Em ambos os casos a ratazana passa com a mesma facilidade!

Justificativa:

A "folga" independe do raio. Seja R o raio de uma circunferência de $C = 2\pi R$. Acrescendo 1 m tem-se $C' = 2\pi R'$. A "folga" igual a 1 m é a diferença $C' - C$. Matematicamente:

$$C' - C = 1 \Rightarrow 2\pi R' - 2\pi R = 1 \Rightarrow (R' - R) = \frac{1}{2\pi} \cong 16\,\text{cm}$$

XXXIII) Dobre a borda inferior da folha de papel de forma que se sobreponham. A figura ilustra: siga os números de 1 a 10.



XXXVIII) Ambos os trens estão à mesma distância da cidade B.

XXXVIII)

1) Atravessa o coelho para a margem B;

2) Retorna sozinho para a margem A;

3) Leva a cenoura para a margem B;

4) Traz de volta o coelho para a margem A;

5) Leva a onça para a margem B, uma vez que a onça não come cenoura;

6) Volta sozinho para a margem A;

7) Finalmente retorna para a margem B com o coelho.

BIBLIOGRAFIA

BARSOTTI, Leo. *Geometria Analítica e vetores*. 3.ª ed. Curitiba: Artes Gráficas / Editora Unificado, 1984. v. 1. 165 p.

BOULOS, Paulo; CAMARGO, Ivan de. *Geometria Analítica*: um tratamento vetorial. 2.ª ed. São Paulo: Mc Graw-Hill, 1987. 383 p.

BOYER, Carl B. *História da Matemática*. São Paulo: Editora da Universidade de S. Paulo, 1974. 488 p.

CABRERA; MEDICI. *Geometria Analítica*. Buenos Aires: [s. l.] 1947. 456 p.

CAROLI, Alésio João de; CALLIOLI, Carlos Alberto; FEITOSA, Miguel Oliva. *Vetores, Geometria Analítica*: teoria e exercícios. 6.ª ed. São Paulo: Nobel, 1968. 212 p.

GIACAGLIA, G. E. O. *Vetores e Geometria Analítica*: Elementos de Álgebra Linear. 3.ª ed. São Paulo: Nobel, 1985. 355 p.

LEHMANN, Charles H. *Geometria Analítica*. México: UTEHA, 1953. 488 p.

LEITE, Olímpio Rudinin Vissoto. *Geometria Analítica Espacial*. São Paulo: Edições Loyola, 1983. 251 p.

MACHADO, Antônio dos Santos. *Álgebra Linear e Geometria Analítica*. São Paulo: Atual, 1980. 210 p.

MAIA, L. P. M. Cálculo Vetorial. Rio de Janeiro: Latino-Americana. 111 p.

MURDOCH, David C. *Geometria* Analítica: com uma introdução ao cálculo vetorial e matrizes. 2.ª ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1971. 296 p.

REIS, Genésio Lima dos; SILVA, Valdir Vilmar da. *Geometria Analítica*. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1984. 227 p.

SANTOS, Nathan Moreira dos. *Vetores e Matrizes*. 2.ª ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1979. 152 p.

SIMMONS, George F. *Cálculo com Geometria Analítica*. São Paulo: Mc Graw-Hill, 1987. v. 1. 829 p.

STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. *Geometria Analítica*. 2.ª ed. São Paulo: Mc Graw-Hill, 1987. 291 p.

ZÓZIMO, Gonçalves Menna. *Geometria Analítica Plana*: tratamento vetorial. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1978. 248 p.